Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
20. Dezember 2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare DGL'n mit konstanten Koeffizienten)
Man bestimme die reellen Lösungen der folgenden DGL
a) $y'' - y' = e^x$
b) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
c) $y'' + 4y = x$
mit Hilfe des Ansatzes vom Typ der rechten Seite.
Kreuzen Sie den richtigen Ansatz für die inhomogene Lösung y_p an:
a) [ ] $y_p = c_1 x e^x$ [ ] $y_p = c_1 x e^{-x}$ [ ] $y_p = c_1 e^x$
b) [ ] $y_p = c_1 x e^{2x}$ [ ] $y_p = c_1 e^{2x}$ [ ] $y_p = c_1\, 2x$
c) [ ] $y_p = e^x$ [ ] $y_p = c_1 x$ [ ] $y_p = c_0 + c_1 x$

Lösung:
Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynome und deren Nullstellen der zugehörigen linearen DGLs:
a) $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \quad \to \quad \lambda_1 = 0\,; \quad \lambda_2 = 1$
b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \quad \to \quad \lambda_{1,2} = 1$
c) $p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) \quad \to \quad \lambda_1 = -2i\,; \quad \lambda_2 = 2i$
Daraus ergeben sich die Ansätze:
a) [X] $y_p = c_1 x e^x$ [ ] $y_p = c_1 x e^{-x}$ [ ] $y_p = c_1 e^x$
b) [ ] $y_p = c_1 x e^{2x}$ [X] $y_p = c_1 e^{2x}$ [ ] $y_p = c_1\, 2x$
c) [ ] $y_p = e^x$ [ ] $y_p = c_1 x$ [X] $y_p = c_0 + c_1 x$

Aufgabe G2 (Systeme homogener DGL'n)
Gegeben ist die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

a) Geben Sie das äquivalente System erster Ordnung an.
b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Frobeniusmatrix sowie die zugehörigen Eigenvektoren.
c) Geben Sie die Lösungen an. Stellen diese ein Fundamentalsystem dar?
d) Vergleichen Sie die Lösungen mit der direkten Lösung der gegebenen DGL und begründen Sie mit Hilfe der Wronsky-Determinante, dass diese ein Fundamentalsystem darstellen.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
&z_1(x) = y(x)\\
&z_2(x) = y'(x) = z_1'(x)\\
&z_3(x) = y''(x) = z_2'(x) = y'(x) + 2y(x) = z_2(x) + 2z_1(x)\\
\leftrightarrow\quad &z_1' = \quad z_2\\
&z_2' = 2z_1 + z_2\\
\leftrightarrow\quad &\vec{z}\,' = A\vec{z} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1\,; \quad \lambda_2 = 2$$

Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
&A\vec{v} = \lambda\vec{v}\\
&\lambda_1 = -1 \quad \rightarrow \quad (A + 1)\,\vec{v}_1 = 0\\
&\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_{11} \\ \vec{v}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&\text{wähle} \quad v_{11} = 1 \quad \rightarrow \quad v_{12} = -1 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\\
&\text{analog:} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c)

$$\text{Lösungen:} \quad \vec{z}_1(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,; \quad \vec{z}_2(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} c_1e^{-x} + c_2e^{2x} \\ -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x} \end{pmatrix}\,; \quad c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Die Eigenvektoren sind linear unabhängig, daher bilden die Lösungen ein Fundamentalsystem.

d) Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Damit ergibt sich die homogene Lösung

$$y_H(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Wronsky-Determinante lautet $W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}$ und ihre Determinante ist $\det W(x) = 3e^x > 0$. Somit handelt es sich um ein Fundamentalsystem.

Aufgabe G3 (Systeme homogener DGL'n)

Gegeben ist das homogene Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{y}(0) = \vec{u}$$

a) Ist die Matrix A diagonalähnlich? Berechnen Sie den Eigenvektor und geben Sie eine Lösung des homogenen Systems an.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems der gegebenen Differentialgleichung mit Hilfe der Beziehung

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{u}; \quad e^{xA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(xA)^j}{j!}.$$

Lösung:

a) Eigenwerte: $\det(A - \lambda E) = 0 \quad \to \quad \lambda_{1/2} = 1$

Die Matrix ist nicht diagonalähnlich.

Eigenvektor: $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \to \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $\vec{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)

$$e^{xA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} A^j$$

Berechnung von A^j:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}; \qquad A^j = \begin{pmatrix} 1-j & j \\ -j & j+1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
e^{xA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \begin{pmatrix} 1-j & j \\ -j & j+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-(j-1)x^j}{j!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{jx^j}{j!} \\ -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{jx^j}{j!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)x^j}{j!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{jx^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{jx^j}{j!} \\ -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{jx^j}{j!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{jx^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}x + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}x \\ -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}x & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}x + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -xe^x + e^x & xe^x \\ -xe^x & xe^x + e^x \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung: $\vec{y}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} u_1(1-x) + u_2 x \\ -u_1 x + u_2(1+x) \end{pmatrix}$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare DGL'n mit konstanten Koeffizienten (3 Punkte))
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 7y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0.$$

Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle -1. Testen Sie die Lösungen auf lineare Unabhängigkeit mit Hilfe der Wronski-Determinanten, für $x_0 = 0$.

Lösung: Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 7\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 = (\lambda+1)^3(\lambda^2+4), \quad \lambda_{1,2,3} = -1,\ \lambda_{4,5} = \pm 2i.$$

Wir bekommen folgendes Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = xe^{-x},\ y_3(x) = x^2e^{-x},\ y_4(x) = \cos(2x),\ y_5(x) = \sin(2x).$$

Die Wronskideterminante in $x_0 = 0$ ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -6 & 0 & -8 \\ 1 & -4 & 12 & 16 & 0 \end{vmatrix} = 500 \neq 0.$$

Aufgabe H2 (Systeme homogener DGL'n (4 Punkte))

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

b) Bestimmen sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Lösung:

a) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom. Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - ((2-\lambda) - 1) + 1 - (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^3 - \lambda - 2 + \lambda - 1 - 1 + \lambda \\ &= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 4 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 \end{aligned}$$

Die potenziellen ganzzahligen Nullstellen sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Probe ergibt, dass 1 eine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. Polynomdivision ergibt:

$$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4) : (\lambda - 1) = -(\lambda^2 - 5\lambda + 4),$$

also

$$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$. Es ist das LGS

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Dieses LGS hat offensichtlich die linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog werden die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$ bestimmt. Wir wenden Gauß an.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten zum Eigenwert 4 den EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\vec{y}(x) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

die Lösungsgesamtheit des allgemeinen Systems.

b) Für das AWP müssen nun α, β, γ bestimmt werden. Auch dies wird mit Gauß getan. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\vec{y}(x) = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$$

die Lösung des AWP.

Aufgabe H3 (Potenzreihen-Ansatz (3 Punkte))

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1-x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ der Potenzreihe.

(b) Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Lösung: (a) Wir verwenden den *Potenzreihenansatz*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

wobei

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned}
& (y(x))^2 + (1-x)\cdot y(x) - 1 \\
= \;& a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \ldots \\
+ \;& (1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) - 1 \\
= \;& (a_0^2 + a_0 - 1) + (2a_0a_1 + a_1 - a_0)x + (2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1)x^2 \\
+ \;& (2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3)x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich

$$a_0 = 1$$

und durch einen Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned}
1 &: \quad a_1 = a_0^2 + a_0 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 \\
x &: \quad 2a_2 = 2a_0a_1 + a_1 - a_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1 \\
x^2 &: \quad 3a_3 = 2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1 \\
x^3 &: \quad 4a_4 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1 \\
x^4 &: \quad 5a_5 = 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 1.
\end{aligned}$$

(b) Aufgrund der Ergebnisse des Aufgabenteils a) können wir vermuten, dass

$$a_n = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

In diesem Fall wäre

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

Wir machen die *Probe*. Mit

$$y'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

folgt

$$y^2(x) + (1-x) \cdot y(x) - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} + (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} = y'(x)$$

und

$$y(0) = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Damit ist

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe H4 (Potenzreihen-Ansatz (4 Punkte))

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die Lösung $y(x)$ sowie der Potenzreihe für die Sinusfunktion die ersten sieben Glieder der Potenzreihe der Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = \sin(x) \cdot y \,, \quad y(0) = 1.$$

Vergleichen Sie das so erhaltene Polynom $P_7(x)$ 7. Grades mit der exakten Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems (Trennung der Veränderlichen!), indem Sie sowohl $y(\frac{1}{2})$ als auch $P_7(\frac{1}{2})$ berechnen.

Lösung: Einsetzen des Potenzreihenansatzes und Koeffizientenvergleich liefern

$$P_7(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6.$$

Die exakte Lösung ist $y(x) = e^{1-\cos x}$. Man erhält

$$P_7(\tfrac{1}{2}) = 1.130230... \quad \text{und} \quad y(\tfrac{1}{2}) = 1.1302258...\,.$$