Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
13. Dezember 2010

8. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten)

Für $x > 0$ sei die Differentialgleichung

$$x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 2x(x+1)$$

gegeben. Die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Berechne die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

Lösung: Wir suchen Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$y_n(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt das lineare Gleichungssystem für c_1', c_2':

$$\begin{pmatrix} (x+1)^2 & x^2 \\ 2(x+1) & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

Dann setzen wir $c_1' = -\frac{x^2 c_2'}{(x+1)^2}$ (1) in die zweite Gleichung ein und erhalten $c_2' = \frac{x+1}{x}$. Integration ergibt $c_2(x) = x + \ln x + d_1,\ d_1 \in \mathbb{R}$. Aus (1) folgt $c_1(x) = -x + \ln(x+1) + d_2,\ d_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G2 (Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)

(a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - y'' - 6y' = 0$ und löse die Differentialgleichung unter den Anfangsbedingungen $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$ und $y''(0) = 17$.

(b) Bestimme alle Lösungen von $y'' + y' = xe^{-x}$.

Lösung:

(a) Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung ist

$$\lambda^2 - \lambda^2 - 6\lambda = (\lambda - 3)(\lambda + 2)\lambda, \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}.$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$c_1 = 1\,, \quad c_2 = 2\,, \quad c_3 = 1\,.$$

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1), \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$. Da -1 ein Nullstelle des charakterisrischen Polynoms ist, ist der Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y_c(x) = x(a_1 + a_2 x)e^{-x}.$$

Setzen wir $y_c(x)$ in die Gleichung ein und vergleichen Koeffizienten. Dann bekommen wir

$$(-2a_2 x + 2a_2 - a_1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Wir erhalten $a_1 = -1,\ a_2 = -1/2$. Die allgemeine Lösung ist daher: $y(x) = y_0(x) + y_c(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + x(-1 - \frac{1}{2}x)e^{-x}$.

Aufgabe G3 (Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)
Bestimme eine Loesung von $y^{(4)} - 4y'' = 1 + \cosh(2x)$ mit dem Ansatz vom Typ der Stoerfunktion.

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4), \quad \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_{3,4} = \pm 2.$$

Es gilt $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Da $L(y_1) = f_1$ und $L(y_2) = f_2$ die Gleichung $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1 + f_2$ ergeben, ist der Ansatz vom Typ der rechten Seite $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, wobei y_1 ist der Ansatz für die Gleichung $y^{(4)} - 4y'' = 1$ und y_2 für $y^{(4)} - 4y'' = \cosh(2x)$. (Hier sind $f_1 = 1$ und $f_2 = \cosh(2x)$.)
Dann ist der Ansatz

$$y_c(x) = ax^2 + bxe^{2x} + cxe^{-2x}.$$

Der Koeffizientenvergleich bringt: $a = -1/8,\ b = 1/32,\ c = -1/32$.

Aufgabe G4 (Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)
Gib ein Beispiel einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten an, die die folgende Lösung besitzt

(a) $y = x^2 e^x$;

(b) $y = e^{2x} \cos x$.

Lösung:

(a) $\lambda = 1$ muss dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein. Man kann z.B. $P(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$ setzen. Dann besitzt die Differentialgleichung $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ die spezielle Lösung $y = x^2 e^x$.

(b) $\lambda = 2 + i$ muss einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein. Sei $P(\lambda) = (\lambda - (2 + i))(\lambda - (2 - i)) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$. Wir haben $2 - i$ genommen, damit die Koeffizienten vom $P(\lambda)$ reel sind. Dann besitzt die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 5 = 0$ die spezielle Lösung $y = e^{2x} \cos x$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)
(**4 Punkte**) Berechne alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \sin x.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$x^3 + 3x^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3, \quad \lambda_{1,2,3} = -1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y_0(x) = (c_1 + c_2 x + c_2 x^2)e^{-x}$. Da i keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, gilt mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y_c(x) = a \cos x + b \sin x.$$

Wir erhalten

$$a \cos x + b \sin x + 3(-a \sin x + b \cos x) + 3(-a \cos x - b \sin x) + a \sin x - b \cos x = \sin x,$$

woraus sich $a = b = -\frac{1}{4}$ ergibt.

Aufgabe H2 (Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)
(**4 Punkte**)
Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y'' - y = \cos x + x$.

Lösung:
Das charakteristische Polynom der Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Daraus ergibt sich: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Hieraus ergibt sich die Lösung der homogenen Gleichung

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x.$$

Wir bestimmen eine partikuläre Lösung $y_c(x)$ durch folgenden Ansatz vom Typ der Störungsfunktion

$$y_c(x) = a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 x + a_4.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt $a_1 = -1/2, /a_2 = 0,\ a_3 = -1,\ a_4 = 0$. Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - \frac{1}{2} \cos x - x.$$

Aufgabe H3 (Lineares homogenes System)
(**4 Punkte**)
Bestimme ein Fundamentalsystem für das folgende System homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: $\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$

Lösung: Die Koeffizientenmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. Zur $\lambda_1 = 1$ gehört der Eigenvektor $v_1 = (-1, 1)^T$, zur $\lambda_2 = 5$ der Vektor $v_2 = (1, 3)^T$. Das Fundamentalsystem ist also

$$\vec{y}_1(x) = e^x(-1, 1)^T, \vec{y}_2(x) = e^{5x}(1, 3)^T.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$(y_1(x), y_2(x))^T = (-c_1 e^x + c_2 e^{5x}, c_1 e^x + 3c_2 e^{5x})^T.$$