Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
29. November 2010

6. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lösung exakter Differentialgleichungen.)
Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung

$$(4x^2y^3 + x\cos y)y' + 2xy^4 + \sin y = 0$$

exakt ist. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

Lösung: Umformen der DGL ergibt

$$\underbrace{(2xy^4 + \sin y)}_{f(x,y)}\,dx + \underbrace{(4x^2y^3 + x\cos y)}_{g(x,y)}\,dy = 0$$

und bilden der gemischten partiellen Ableitung von $f(x, y)$ und $g(x, y)$ liefert

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 8xy^3 + \cos y\,.$$

Somit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt und die Differentialgleichung ist exakt.
Dann gilt auch

$$u_x(x, y) = f(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = g(x, y)\,.$$

Damit ergibt sich

$$u(x, y) = x^2y^4 + x\sin y$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$x^2y^4 + x\sin y = c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe G2 (Lösung durch Übergang zur Umkehrfunktion)
Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen Anfangsproblems.

$$y'(x) = \frac{1}{2x - e^y}\,, \quad y(1) = 0\,.$$

Lösung: Durch Vertauschung der Variablen wird

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

zu

$$x'(y) = \frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{f(x(y), y)} ,$$

hier also

$$x'(y) = 2x - e^y , \quad x(0) = 1$$

Dies ist eine lineare DGL erster Ordnung, die sich durch Variation der Konstanten lösen lässt. Homogene Lösung:

$$x_h'(y) = 2x_h \quad \text{jetzt} \quad x_h := x$$

$$\frac{dx}{dy} = 2x$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int 2\, dy$$

$$ln|x| = 2y + c$$

$$|x| = e^{2y+c} = \tilde{k}e^{2y} , \quad \tilde{k} \in \mathbb{R}+$$

$$x_h(y) = ke^{2y} , \quad k \in \mathbb{R}$$

Partikuläre Lösung:

$$x_p(y) = k(y)e^{2y} \quad \text{jetzt} \quad x_p := x$$

$$x' = k'e^{2y} + 2ke^{2y}$$

einsetzen in DGL liefert

$$k' = -e^{-y}$$

und somit

$$x_p(y) = e^y .$$

Die Gesamtlösung setzt sich zusammen aus homogener und partikulärer Lösung und lautet

$$x(y) = x_h(y) + x_p(y) = ke^{2y} + e^y .$$

Das Anfangswertproblem liefert

$$x(0) = k + 1 = 1 \quad \rightarrow \quad k = 0 .$$

Daraus folgt

$$x(y) = e^y \quad \text{und} \quad y(x) = ln(x) .$$

Aufgabe G3 (Lipschitzbedingung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x^2} + x,\ y(1) = 0$.
Sei $0 < a < 1$ und sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - a < x,\ y \in \mathbb{R}\}$. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf E? Berechnen Sie dann die Näherungslösungen $y_1,\ y_2,\ y_3$ mit Picarditeration ausgehend von der Anfangsnäherung $y_0(x) = 0$.

Lösung: Lipschitz-Stetigkeit:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$$

Hier also

$$\left|\left(\frac{y_2}{x^2} + x\right) - \left(\frac{y_1}{x^2} + x\right)\right| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$$

bzw.

$$\frac{1}{x^2}\,|y_2 - y_1| \leq L \cdot |y_2 - y_1| \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{x^2}\,.$$

Für $x_0 = 1$ und $a < 1$ ist daher die Lipschitz-Stetigkeit erfüllt und es gibt im Intervall $J = [x_0 - a, x_0 + a]$ genau eine Lösung.

Picard-Lindelöf-Iteration

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1}(t))\, dt \quad \text{für} \quad x \in J$$

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= \int_1^x \left(\frac{0}{t^2} + t\right) dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
y_2(x) &= \int_l^x \left(\frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}}{t^2} + t\right) dt \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \\
y_3(x) &= \int_l^x \left(\frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}}{t^2} + t\right) dt = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lösung exakter Differentialgleichungen.)
(3 Punkte)
Zeigen Sie dass folgende Differentialgleichung exakt ist und geben Sie die allgemeine Lösung an.

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Lösung:

$$\underbrace{(2x + 3x^2y)}_{f(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^3 - 3y^2)}_{g(x,y)}\,dy = 0$$

Die partiellen Ableitung von $f(x, y)$ und $g(x, y)$ lauten

$$f_y = 3x^2 \quad \text{und} \quad g_x = 3x^2\,.$$

Somit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt und die Differentialgleichung ist exakt.
Dann gilt auch

$$u_x(x, y) = f(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = g(x, y)\,.$$

Damit ergibt sich

$$u(x, y) = x^2 + x^3y + h_1(y) \quad \text{und} \quad u(x, y) = x^3y - y^3 + h_2(x)\,,$$

woraus folgt

$$h_1(y) = y^3 \quad \text{und} \quad h_2(x) = x^2\,,$$

so dass

$$u(x, y) = x^3y + x^2 - y^3$$

gilt und die allgemeine Lösung

$$x^3y + x^2 - y^3 = c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

lautet.

Aufgabe H2 (Lipschitzbedingung)
(1+1+1 Punkte)
Gegeben sind folgende Funktionen. Erfüllt f eine Lipschitzbedingung bezüglich y auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$?

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2}\, y^2$

b) $f(x, y) = x^2 + 2y$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x}\, y$

Lösung:

a) Lipschitzbedingung: $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$

$$\left| \frac{y_2^2}{1 + x^2} - \frac{y_1^2}{1 + x^2} \right| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$$

$$\left| \frac{y_1 + y_2}{1 + x^2} \right| \cdot |y_2 - y_1| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$$

Es gibt keine Konstante L, die diese Bedingung erfüllt.

b)

$$|x^2 + 2y_2 - (x^2 + 2y_1)| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$$
$$2|y_2 - y_1| \leq L \cdot |y_2 - y_1| \quad \rightarrow \quad L = 2$$

Die Lipschitzbedingung ist erfüllt.

c)

$$\left|\frac{1}{1-x}\right| \cdot |y_2 - y_1| \leq L \cdot |y_2 - y_1| \quad \text{für } x \rightarrow 1 \leftrightarrow L \rightarrow \infty$$

Die Lipschitzbedingung ist nicht erfüllt.

Aufgabe H3 (Spezielle Differentialgleichung erster Ordnung.)
(**3+1 Punkte**)
Sei die Differentialgleichung $2(y + y') = x + 3$ gegeben.

a) Finden Sie die analytische Lösung zur Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

b) Berechnen Sie 2 Näherungslösungen mit Hilfe des Picard-Lindelöf-Iterationsverfahrens. Starten Sie mit $u_0(x) = 0$.

Lösung:

a)

$$y' = -y + \frac{x+3}{2}$$

Homogene Lösung:

$$y_h'(x) = -y \quad \text{jetzt} \quad y_h := y$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$
$$\int \frac{1}{y}\, dx = \int -\, dx$$
$$ln|y| = -x + c$$
$$|y| = e^{-x+c} = \tilde{k}e^{-x}\,, \quad \tilde{k} \in \mathbb{R}+$$
$$x_h(y) = ke^{-x}\,, \quad k \in \mathbb{R}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = k(x)e^{-x} \quad \text{jetzt} \quad y_p := y$$
$$y' = k'e^{-x} - ke^{-x}$$

einsetzen in DGL liefert

$$k'e^{-x} - ke^{-x} = -ke^{-x} + \frac{x+3}{2}$$
$$\frac{dk}{dx} = \frac{x+3}{2}\, e^x$$
$$k = \int \frac{x+3}{2}\, e^x\, dx$$
$$k = e^x\left(\frac{x}{2} + 1\right) \quad \rightarrow \quad y_p(x) = \frac{x}{2} + 1$$

Daraus folgt für die Gesamtlösung:

$$y(x) = ke^{-x} + \frac{x}{2} + 1$$

Für das Anfangswertproblem (AWP) bedeutet dass

$$0 = k + 1 \quad \rightarrow \quad k = -1$$

und somit

$$y(x) = -e^{-x} + \frac{x}{2} + 1$$

b)

$$u_0(x) = 0$$

$$u_1(x) = 0 + \int_0^x \frac{s+3}{2} ds = \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}$$

$$u_2(x) = 0 + \int_0^x \left(-\frac{s^2}{4} - \frac{3s}{2} + \frac{s+3}{2} \right) ds = \frac{-x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2}$$