Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
22. November 2010

5. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Löse die folgenden Differentialgleichungen:

Aufgabe G1 (Trennung der Veränderlichen)

$$y' = \frac{1+y^2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Lösung: Die Funktion $1 + y^2(x)$ hat keine Nullstelle, es gibt also keine konstante Lösung. Nichtkonstante Lösungen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x} \\
\arctan y(x) &= \ln|x| + \ln c = \ln c|x|, \quad c > 0 \\
y(x) &= \tan(\ln c|x|).
\end{aligned}$$

Für jedes c ist die Lösung auf jedem Interval $(1/c \cdot e^{-\pi/2+\pi k}, 1/c \cdot e^{\pi/2+\pi k})$ definiert.

Aufgabe G2 (Ähnlichkeitsgleichung)

$$y' = \frac{x+y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1 + \frac{y(x)}{x}}{1}. \\
\text{Substitution:} \quad z(x) &= \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y'(x) = z'(x)x + z(x). \\
z'(x)x + z(x) &= 1 + z(x); \\
z'(x) &= \frac{1}{x}; \\
z(x) &= \ln|x| + c; \\
y(x) &= xz(x) = x(\ln|x| + c).
\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Variation der Konstanten)

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{2y}{x} + 2x^3, \quad x \neq 0; \\ y_h(x) &= c \cdot e^{\ln x^2} = cx^2; \\ y_0(x) &= x^2 \int 2x^3 \frac{1}{x^2}\, dx = 2x^2 \int x\, dx = x^4; \\ y(x) &= y_h(x) + y_0(x) = cx^2 + x^4. \end{aligned}$$

Aufgabe G4 (Bernoullische Differentialgleichung)

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4, \quad x \neq 0\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{x} + x^2 y^4, \quad n = 4; \\ z(x) &= (y(x))^{-3}, \quad y(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Durch diese Substitution geht die triviale Lösung verloren. Das sollen wir am Ende berücksichtigen.

$$\begin{aligned} z'(x) &= -3 \cdot -\frac{1}{x} z(x) + (-3)x^2; \\ z'(x) &= \frac{3}{x}\, z(x) - 3x^2; \\ z_h(x) &= ce^{3\int \frac{dx}{x}} = cx^3; \\ z_0(x) &= |x|^3 \int (-3x^2)\, \frac{1}{|x|^3}\, dx = -3|x|^3 \int \frac{1}{|x|}\, dx = -3x^3 \int \frac{1}{x}\, dx = -3x^3 \ln|x|; \\ z(x) &= x^3(c - 3\ln|x|). \end{aligned}$$

Daher sind

$$y(x) = (z(x))^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x(c - 3\ln|x|)^{1/3}} \quad \text{und} \quad y(x) \equiv 0$$

die Lösungen.

Hausübung

Löse die folgenden Differentialgleichungen:

Aufgabe H1 (Trennung der Veränderlichen)
(**3 Punkte**)

$$y' = \frac{x^2 y^2}{(x-2)}\,, \quad x \neq 2.$$

Lösung: Die konstante Lösung ist $y(x) \equiv 0,\ x \neq 2$. Für $x \neq 2,\ y \neq 0$ gilt $\int \frac{x^2 dx}{x-2} = \int \frac{dy}{y^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{x-2} &= \int \frac{(x^2-4)dx}{x-2} + \int \frac{4dx}{x-2} = \int \frac{dy}{y^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int (x+2)dx + 4\ln|x-2| + c \ = -\frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-2| + c}, \; c \neq -(\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-2|) \quad \text{und} \quad y(x) \equiv 0.$$

Aufgabe H2 (Variation der Konstanten)
(**3 Punkte**)
Bestimme die Lösungen des Anfangswertproblems $y'x + y = 1 + x$ mit $x > 0$ und $y(1) = \frac{5}{2}$.
Lösung:

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= cx^{-1}, \\
y_0(x) &= x^{-1}\int \frac{1+x}{x}\, x\, dx = x^{-1}\int (1+x)dx = x^{-1}(x + \frac{x^2}{2}) = 1 + \frac{x}{2}; \\
y(x) &= cx^{-1} + 1 + \frac{x}{2} \\
y(1) &= c + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow c = 1.
\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = x^{-1} + 1 + \frac{x}{2}.$$

Aufgabe H3 (Riccatische Differentialgleichung)
(**4 Punkte**)

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4, \; x > 0.$$

Hinweis: Spezielle Lösung $u(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0.$
Lösung:

$$y' = -\frac{y}{x} - y^2 + \frac{4}{x^2}, \quad x > 0.$$

Spezielle Lösung: $u(x) = \frac{2}{x}$. $y(x) = u(x) + v(x)$, wobei v ist die Lösung der Bernoullischen Gleichung $v'(x) = [-\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{2}{x}]\cdot v - v^2 = -\frac{5}{x}\,v - v^2$. Transformation zur Bernoullischen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
z(x) &= (v(x))^{-1}, \\
z'(x) &= \frac{5}{x}\,z + 1, \\
z_h(x) &= ce^{5\int\frac{dx}{x}} = cx^5, \\
z_0(x) &= x^5\int x^{-5}dx = x^5\,\frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4}\,x, \\
z(x) &= z_0(x) + z_h(x) = cx^5 - \frac{1}{4}\,x, \\
v(x) &= \frac{4}{cx^5 - x}, \\
y(x) &= \frac{2}{x} + \frac{4}{cx^5 - x};
\end{aligned}$$