Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

4.Übung

Präsenzaufgaben

G1 (Multiple Choice)

	linear	nicht linear	implizit	explizit	autonom
$y'(x) = f(x)y(x)$	[x]	[ ]	[ ]	[x]	[ ]
$y'(x) = 1 + x + y(x)$	[x]	[ ]	[ ]	[x]	[ ]
$y'(x) = y^2(x)$	[ ]	[x]	[ ]	[x]	[x]
$y''(x) = (y'(x))^2 + y(x)$	[ ]	[x]	[ ]	[x]	[x]
$sin(xy'(x)) = 0$	[ ]	[x]	[x]	[ ]	[ ]
$(yy^{(5)})^2 + xy'' + ln(y) = 0$	[ ]	[x]	[x]	[ ]	[ ]
$y' = xy^2$	[ ]	[x]	[ ]	[x]	[ ]
$y''(x) = -\frac{(y'(x))^2}{-5y(x)}$	[ ]	[x]	[ ]	[x]	[x]
$y'(x) = sin(y(x))$	[ ]	[x]	[ ]	[x]	[x]

G2 (Richtungsfelder)

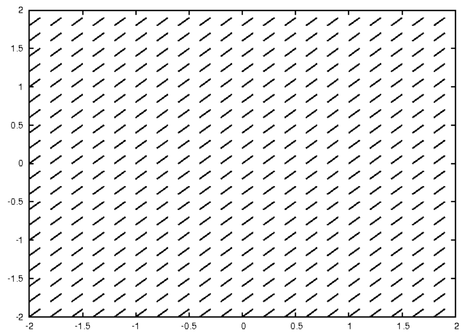

Figure 1: $x' = 1$

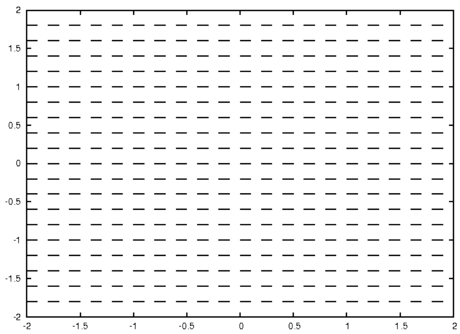

Figure 2: $x' = 0$

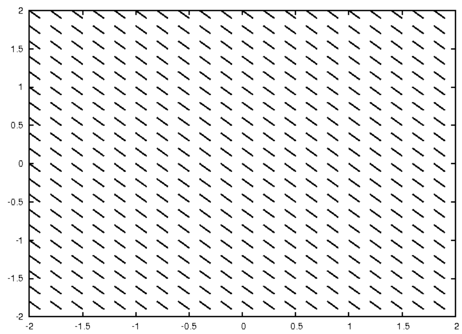

Figure 3: $x' = -1$

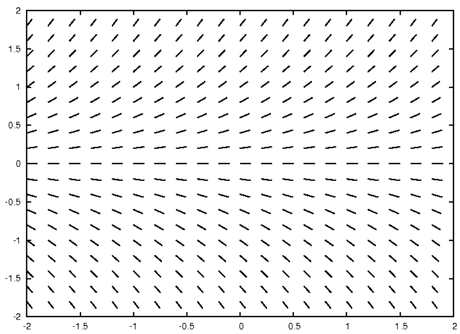

Figure 4: $x' = x$

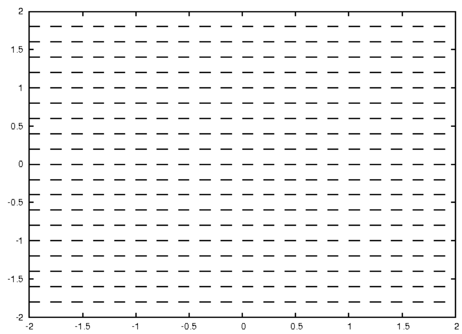

Figure 5: $x' = 0x$

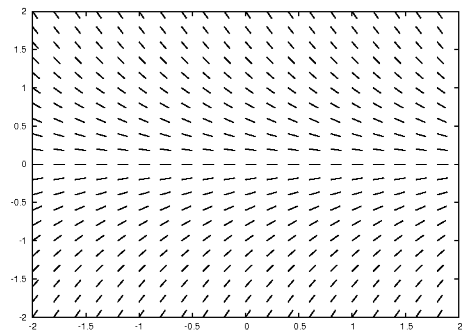

Figure 6: $x' = -x$

i) Siehe Abbildungen.

ii) Eine Lösung der Dgl ist eine Kurve $y(x)$ im Richtungsfeld, deren Ableitung in jedem Punkt $y' = p$ bzw. $y' = qy$ ist. Das bedeutet insbesondere, dass das Vektorfeld in jedem Kurven Punkt tangential ist.

G3 (Gerüchteküche und beschränktes Wachstum)

Der Anteil der Uninformierten zum Zeitpunkt t ist

$$q = \frac{N - I(t)}{N}.$$

i) In einer Zeitspanne der Länge Δt trifft ein Informierter auf $kq\Delta t$ Nichtinformierte. Da es $I(t)$ Informierte gibt bedeutet dies

$$I(t)' = T(t)kq = \frac{k}{N} I(t)(N - I(t)).$$

Das ist gerade eine Gleichung vom Typ des beschränkten Wachstums.

ii) Abb. 1

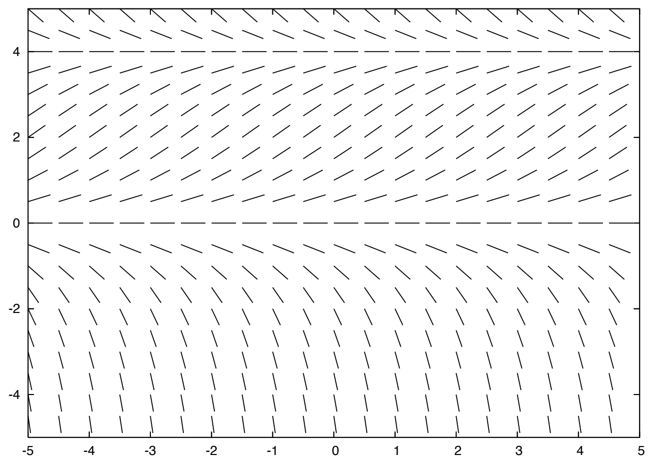

Abbildung 1: $I(t)' = \frac{1}{4}I(t)(4 - I(t)$

Hausaufgaben

H1 (Potentiale) **($3 + 2$ Punkte)**

Eine Funktion f ein Potential genau dann wenn $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ gilt.

(1) $\partial_1 f_2 = 6x_1x_2,\ \ \partial_2 f_1 = 6x_1x_2$. Die Funktion f hat also ein Potential.

(2) $\partial_1 g_2 = -e^{x_2}\sin x_1,\ \ \partial_2 g_1 = e^{x_2}\sin x_1$. Die Funktion g hat also kein Potential.

(3) h besitzt ein Potential φ, da gilt

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = 2 = \frac{\partial h_2}{\partial x}.$$

Ein Potential φ hat die Form

$$\varphi(x, y) = (3/2)x^2 + 2xy + c.$$

Die Rechnung für die Funktion f noch einmal ausführlich:

(a) $f_1(x) = \partial_1\varphi(x)$

(b) $f_2(x) = \partial_2\varphi(x)$.

Daraus folgt durch Integration

(a) $\varphi(x_1, x_2) = \int f_1(x_1, x_2)dx_1 + C_1(x_2) = \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + C_1(x_2)$

(b) $\varphi(x_1, x_2) = \int f_2(x_1, x_2)dx_2 + C_2(x_1) = \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + C_2(x_1)$

also gilt $\varphi(x_1, x_2) = \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + C$ für $C \in \mathbb{R}$.

ii) $\int_W F\, dX = \varphi(0, 2) - \varphi(1, 0) = -3/2$.

H2 (Potentiale erzeugen keine Wirbelfelder) **($2+1$ Punkte)**

i) Es gilt $f_{ij} = f_{ji}$ für $i, j \in \{x, y, z\}$, da f zweimal stetig differenzierbar ist.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}(f) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = 0$$

ii) $\operatorname{rot} E = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$

H3 (Stromdurchflossener Leiter) **($2+2+2$ Punkte)**

i) $(B_1)_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ und $(B_2)_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. Daher gilt $(B_1)_x = -(B_2)_y$. Daraus folgt $\operatorname{div} B = (B_1)_x + (B_2)_y + (B_3)_z = 0$
Beachte, daß alle partiellen Ableitungen nach z stets gleich null sind und

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = I(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} = -I(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}) \ .$$

Daher gilt

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = I(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}) = I\frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2} = 0 \ .$$

Und wir erhalten:

$$(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}, \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}, \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}) = (0,0,0) \ .$$

ii) Die Funktion $\phi = I arctan^{-1}(\frac{y}{x})$ erfüllt $\operatorname{grad}\phi = B$. Allerdings ist sie nicht auf ganz $R^3\backslash\{(0,0,0)\}$ stetig. Auf dem Gebiet D ist sie es. Dort ist sie ein Potenial für das Feld B. Nun gehen wir über zu $R^3\backslash\{(0,0,0)\}$. Wir integrieren entlang der Kurve $(0, 2\pi] \ni \phi \mapsto (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ und erhalten

$$\int_K B\, ds = \int_0^{2\pi} I \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = \int_0^{2\pi} I\, d\phi \neq 0 \ .$$

Wir haben über eine geschlossene Kurve integriert. Besäße B auf $R^3\backslash\{(0,0,0)\}$ ein Potential, wäre das Integral gleich null.

iii) Wir berechnen den Normalenvektor auf der Zylineroberfläche: $n = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ und den Poynting Vektor $S = \frac{1}{\mu_0} E \times B = \frac{I^2}{(x^2+y^2)}(-x, -y, 0)^T = \frac{I^2}{r}(-\cos\phi, -\sin\phi, 0)^T$ Wir erhalten

$$\int_Z \operatorname{div} S\, d(x,y,z) = \int_{\partial Z} Sn\, d\sigma = \int_{\partial Z} I^2\, d\sigma = -2\pi I^2.$$