Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
8. November 2010

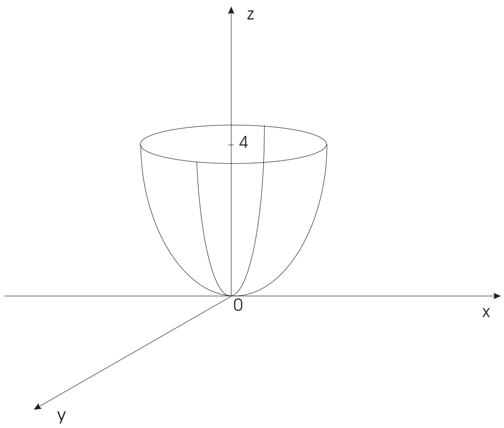
3. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Flächeninhalt)
Berechne den Oberflächeninhalt desjenigen Teils des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$ liegt.

Lösung:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



Flächeninhalt: $I(S) = \int\limits_S d\sigma = \int\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d(x, y)$.
Hier haben wir das Ergebnis aus Ü2 H2 b) angewendet.

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = 2y.$$

Einführung der Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \varphi \in (0, 2\pi),\ r \in (0, 2)$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} I(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot \frac{1}{8}\, d(1 + 4r^2) = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$)

(a) Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ und $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy+1 \\ -e^y \end{pmatrix}$. Berechne $\int_{\partial\Omega} f(s) \cdot ds$ mit Hilfe des Satzes von Stokes in $\mathbb{R}^2$.

(b) Sei $v(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ ein Vektorfeld. Bestimme $\int_{\partial S} v(s) \cdot ds$ mit Hilfe des Satzes von Stokes in $\mathbb{R}^3$, wobei ∂S die Schnittkurve des Zylinders $x^2+y^2 = 1$ mit der Ebene $x+y+z = 1$ ist.

Lösung:

(a) Mit dem Stokesschen Satz in $\mathbb{R}^2$:
Sei $\gamma(t)$ eine Parametrisierung des Randes. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f(s) \cdot ds &= \int_{\partial\Omega} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \overset{\text{Satz}}{=} \int_{\Omega} (-\frac{\partial}{\partial x}(e^y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy+1))dx\,dy \\ &= -\int_0^1 \int_0^1 x\,dxdy = -\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

(b) Mit dem Stokesschen Satz in $\mathbb{R}^3$:

$$\int\limits_{\partial S} v \cdot ds = \int\limits_{S} (\operatorname{rot} v \cdot n) d\tau, \quad \operatorname{rot} v = \nabla \times v = (0, 0, 3(x^2+y^2))^T.$$

Die Parametrisierung von S (S ist der vom Zylinder ausgeschnittene Teil der Ebene) ist

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} : K \to \mathbb{R}^3,$$

wobei

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\} \quad \text{– Einheitskreisscheibe.}$$

Der Normalenvektor $n = \frac{F_x \times F_y}{\|F_x \times F_y\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Also gilt (nach Übergang zu den Polarkoordinaten)

$$\int\limits_{\partial S} v(s)\,ds = \int\limits_{K} (\operatorname{rot} v, F_x \times F_y)dxdy = 3\int\limits_{K} (x^2+y^2)dxdy = \frac{3}{2}\pi.$$

Aufgabe G3 (Satz vom Gauss)

Man nennt den Punkt (x,y,z) eine Quelle bzw. Senke, wenn $\operatorname{div} v(x,y,z) > 0$ bzw. $\operatorname{div} v(x,y,z) < 0$ ist. Das Vektorfeld v heißt quellenfrei, wenn überall $\operatorname{div} v = 0$ gilt.
Bestimme den Fluss $\left(\int_{\partial K} v \cdot n\, d\sigma\right)$ des Feldes $v(x,y,z) = (2z, x+y, 0)^T$ durch die Oberfläche der Kugel K: $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ (von innen nach außen). Hat v Quellen oder Senken?

Lösung: Der Fluss des Feldes v durch die Oberfläche der Kugel (von innen nach außen) beträgt (nach Ubegang zu Kugelkoordinaten)

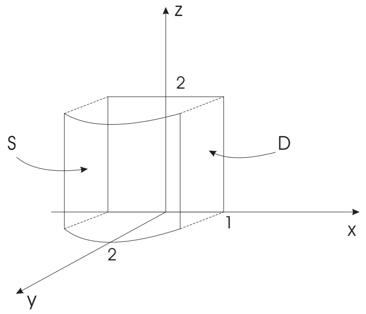
$$\int\limits_{\partial K} (v \cdot n)d\sigma = \int\limits_{K} \operatorname{div} v\, dv = \int\limits_{K} dv = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{r} \rho^2 \cos\theta d\rho d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{r} \rho^2 d\rho \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3} r^3 (\sin\theta)|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

$\operatorname{div} v(x,y,z) = 1 > 0 \Rightarrow v$ hat die Quellen in jedem Punkt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Flächeninhalt)
(**3 Punkte**)
Durch den über dem Rechteck $D = \{(x,z) : -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$ liegenden Teil des Zylinders $y^2+x^2 = 4$ sei das Flächenstück S in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Berechne das Oberflächenintegral von $\rho(x,y,z) = y^2$ über S. (Den erhaltenen Wert kann man z.B. als die Masse des Zylinderteilstücks mit der Dichte ρ interpretieren). *Hinweis:* $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c, \quad a > 0.$



Lösung: (1P)

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \mid y = \sqrt{4-x^2},\ (x,y) \in D\}(1P). \\ y'_x &= -x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y'_z = 0. \\ \int\limits_S \rho\, d\sigma &= \int\limits_D y^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\, d(x,y)(1P) \\ &= 2\int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy\, \sqrt{4-x^2} = 4\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\,dx \\ &= 4(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}|_{-1}^1 + 2\arcsin\frac{x}{2}\,|_{-1}^1) \\ &= 4(\sqrt{3}+\frac{4\pi}{6}) = 4\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$)
(**3+3 Punkte**)

(a) Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y,\, y^2 \le x\}$ und ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y^2,\, x^2-2xy)^T$ gegeben. Berechne $\int_{\partial\Omega} f(s)\cdot ds$.

(b) Sei ein Vektorfeld $v = (x, x+y, x+y+z)^T$ gegeben. Berechne die Zirkulation von v: $\int_{\partial S} v\cdot dS$ längs der Schnittkurve ∂S der Sphäre $x^2+y^2+z^2 = 1$ mit der Ebene $z = \sqrt{3}/2$.

Lösung:

(a) (1P) fürs Bild. $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))^T$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(s)ds &\overset{\text{Satz}}{=} \int\limits_\Omega (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy(1P) \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2x-2y-2y)dy(1P) \\ &= 2\int_0^1 (xy-y^2)|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 (x\sqrt{x}-x-x^3+x^4)dx \\ &= 2(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5)|_0^1 = 2(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}) = -\frac{3}{10}\,. \end{aligned}$$

(b) Die Projektion K von S auf $xy-$Ebene ist eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $1/2$, da $x^2+y^2 = 1-(\sqrt{3}/2)^2 = 1/4$ ist (1P).

$$\int_{\partial S} v \cdot ds \overset{\text{Satz}}{=} \int_S (\mathrm{rot} v \cdot n) d\sigma (1P) = \int\limits_K \mathrm{rot} v \cdot e_3 dxdy = \int\limits_K \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dxdy (1P) = \pi/4.$$

Aufgabe H3 (Satz von Gauss)
(**3 Punkte**)
Berechne den Fluss des Feldes $v = (xy^2, x^2y, y)^T$ durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, \ -1 \le z \le 1\}$. Bestimme die Quellpunkte von v.

Lösung: Der Fluss des Feldes $v = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ y \end{pmatrix}$ durch die gesamte Oberfläche S des Zylinderabschnitts B beträgt

$$\int\limits_S (v \cdot n) ds = \int\limits_B (\mathrm{div} v) dv = \int\limits_B (x^2+y^2) dxdydz = \pi (2P).$$

Da $\mathrm{div} v = x^2+y^2 > 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt, ist jeder Punkt außerhalb der z-Achse ein Quellpunkt (1P).