Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
25. Oktober 2010

1. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Polarkoordinaten)
Substituiere Polarkoordinaten (r, ϕ) zur Berechnung des Integrals $\int_G f(x,y)d(x,y)$ mit

(a) $G = \{(x,y): \ x^2+y^2 \le a^2, \ a>0\}$,

(b) $G = \{(x,y): \ a^2 \le x^2+y^2 \le b^2, \ y \ge 0, \ 0 \le a < b\}$,

(c) $G = \{(x,y): \ x^2+y^2 \le ax, \ 0 \le a\}$.

Lösung:

(a) $\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$.

(b) $\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_0^{\pi} d\varphi \int_a^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$.

(c) G ist eine Kreisscheibe mit dem Radius $a/2$ und Mittelpunkt $(a/2, 0)$. Für jedes φ gilt $0 \le r \le a\cos\varphi$. Daher gilt $\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$.

Aufgabe G2 (Einige dreidimensionale Körper)
Verwende eine passende Substitution, um das Volumen $\int_V d(x,y,z)$ der folgenden dreidimensionalen Körper zu berechnen:

(a) $V = \{(x,y,z): \ x^2+y^2+z^2 \le a^2, \ x>0, \ y>0, \ a>0\}$,

(b) $V = \{(x,y,z): \ x^2+y^2 \le z, \ 0 \le z \le a, \ a>0\}$,

(c) $V = \{(x,y,z): \ x^2+y^2 \le a^2, \ 0 \le z \le b, \ 0 < a, b\}$,

(d) $V = \{(x,y,z): \ x^2+y^2 \le z^2, \ 0 \le z \le a, \ 0 < a\}$.

Lösung:

(a) V stellt ein viertel Wassermelone dar. Hier werden Kugelkoordinaten verwendet: $\int_V d(x,y,z) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^2\cos\theta dr = \frac{\pi a^3}{3}$.

(b) V ist ein Paraboloid mit der Höhe a. Wir verwenden Zylinderkoordinaten: $\int_V d(x,y,z) = \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} rdr = \frac{\pi a^2}{2}$.

(c) V ist ein Zylinder mit dem Radius a und mit der Höhe b. Hier ist es natürlich auch Zylinderkoordinaten zu verwenden: $\int_V d(x,y,z) = \int_0^b dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdr = \pi a^2 b$.

(d) V ist eine umgedrehte Kegel mit der Höhe a. Hier verwenden wir auch Zylinderkoordinaten: $\int_V d(x,y,z) = \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z r dr = \frac{\pi a^3}{3}$.

Aufgabe G3 (Länge eines Weges)

Betrachte den Weg

$$\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \ \alpha(t) = (t^2, t^3).$$

a) Skizziere die zum Weg gehörende Kurve α.
b) In welchen Punkten $\alpha(t)$ gilt $\alpha'(t) \neq (0,\, 0)$?
c) Berechne die Länge der Kurve α.
Hinweis: Beachte $\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx = (1/3)\sqrt{(a^2+x^2)^3}$

Lösung: b) $\alpha'(t) = (2t,\, 3t^2)$.
In allen Punkten ausser dem Nullpunkt gilt $\alpha'(t) \neq (0,0)$.
c)

$$L = \int_{-1}^{1} \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt = \int_{-1}^{1} |t|\,\sqrt{4+(3t)^2}\,dt = 2\int_0^1 t\sqrt{4+(3t)^2}\,dt =$$

$$6\int_0^1 t\sqrt{(2/3)^2+t^2}\,dt = 2\sqrt{((2/3)^2+t^2)^3}|_0^1 = 2\sqrt{((4/9)+1)^3} - 2\sqrt{(4/9)^3} =$$

$$2\sqrt{(13/9)^3} - 2(2/3)^3 = (26/27)\sqrt{13} - 16/27.$$

Aufgabe G4 (Wegintegrale skalarwertiger Funktionen)

In einer Junggesellenwohnung, deren Fußboden wir uns als die Halbebene

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

vorstellen, hat sich vor der Wand $x = 0$ eine Staubschicht angehäuft, deren Höhe $h(x,y) = 2e^{-x}$ beträgt (in Millimetern, an der Stelle $(x,y) \in H$, wobei x, y in Metern gemessen seien). Der junge Mann bewegt den Staubsauger während einer Sekunde geradlinig auf einer Strecke Γ vom Punkt $(2,0)$ nach $(1,1)$. Zur Zeit $t \in [0,1]$ befinde sich die Düse des Saugers an der Stelle

$$\gamma(t) := (2-t^2, t^2).$$

Das momentan pro zurückgelegter Wegstrecke beim Passieren des Punktes $(x,y) \in \Gamma$ aufgenommene Volumen Staub betrage $f(x,y) = 0,2 \cdot h(x,y)$ (in Liter pro Meter). Berechne das Gesamtvolumen Staub, das längs der Strecke Γ eingesaugt wird.

Lösung: Das gesuchte Volumen ist

$$V = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = 0,4\cdot\sqrt{2}\int_0^1 e^{-(2-t^2)}\cdot 2t\,dt = 0,4\cdot\sqrt{2}e^{-2}[e^{t^2}]_0^1 = 0,4\cdot\sqrt{2}e^{-2}(e-1).$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Masse eines Körpers)
(4 Punkte)

Die Masse m eines Körpers $V \in \mathbb{R}^3$ mit der Massendichte $\rho(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wird mit Hilfe des folgenden Integrals bestimmt:

$$m = \int_V \rho(x,y,z) d(x,y,z).$$

Bestimme die Masse des Körpers $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ mit der Massendichte $\rho = \frac{1}{\alpha+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \alpha > 0$.

Lösung: Wir betrachten Kugelkoordinaten (1P), d.h. die Transformation

$$h : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\times[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3, \qquad h(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)^T.$$

Es gilt $\det(J_h(r, \varphi, \theta)) = r^2\cos\theta$. Nach der Koordinatentransformation: $\rho(h(r, \varphi, \theta)) = 1/(r + \alpha)$. (1P) Dann gilt:

$$m = \int_V \rho(x, y, z)d(x, y, z) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2\cos\theta}{r + \alpha}drd\varphi d\theta(1P) = 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int_0^1\frac{r^2}{r+\alpha}dr =$$
$$2\pi\int_0^1(r - \alpha + \frac{\alpha^2}{r + \alpha})dr = 2\pi(1 - \alpha + \alpha^2\ln\frac{1 + \alpha}{\alpha}).(1P)$$

Aufgabe H2 (Zylinderkoordinaten)
(**5 Punkte**)
Bestimme das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des durch die Gleichung $(x + 2)^2 + y^2 = 4z$ gegebenen Paraboloids liegt.

Lösung: Wir benutzen Zylinderkoordinaten (1P), d.h. die Transformation

$$h : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad h(r, \varphi, z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)^T$$

mit $\det(J_h(r, \varphi, z)) = r$. Die Höhe des Körpers in kartesischen Koordinaten können wir direkt aus der Aufgabenstellung ablesen: $0 \leq z \leq \frac{1}{4}(x + 2)^2 + \frac{1}{4}y^2$ (1P). In Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 + y^2 = 4z \quad &\Leftrightarrow \quad (r\cos\varphi + 2)^2 + r^2\sin^2\varphi = 4z \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1.(1P)\end{aligned}$$

Dann ist das gesuchte Volumen:

$$\begin{aligned}V &= \iiint_T 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r(1P) \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^2 + r\cos\varphi + 1\right) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^2\left[\frac{1}{4}r^3\varphi + r^2\sin\varphi + r\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2\left(\frac{\pi}{2}r^3 + 2r\pi\right)\mathrm{d}r = \left[\frac{\pi}{8}r^4 + \pi r^2\right]_{r=0}^{r=2} = 6\pi.(1P)\end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Ein Wegintegral)
(**3 Punkte**)
Es sei W der Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$, der sich aus dem durch $X(t) = (t^2, t)$ mit $t \in [0, 1]$ parametrisierten Weg W_1 und dem Geradenstück W_2 von $(1, 1)$ nach $(1, 0)$ zusammensetzt. Berechne das Wegintegral

$$\int_W F \cdot dX$$

für das Vektorfeld

$$F(x, y) = (2xy - x^2,\ x + y^2).$$

Lösung: $X_1(t) = (t^2,\, t)$, $t \in [0,1]$, $X_2(t) = (1, 1-t)$, $t \in [0,1]$ (1P)

$$\int_W F \cdot dX = \int_{W_1} F\,dX_1 + \int_{W_2} F\,dX_2 =$$

$$\int_0^1 (2t^3 - t^4, 2t^2) \cdot (2t, 1)\,dt + \int_0^1 (2(1-t) - 1,\, 1 + (1-t)^2)) \cdot (0, -1)\,dt(1P) = (1P)$$

$$\int_0^1 4t^4 - 2t^5 + 2t^2 - 1 - (1-t)^2\,dt = \int_0^1 -2t^5 + 4t^4 + t^2 + 2t - 2\,dt =$$

$$(-(1/3)t^6 + (4/5)t^5 + (1/3)t^3 + t^2 - 2t)_{t=0}^1 = -(1/3) + (4/5) + (1/3) + 1 - 2 = -1/5(1P).$$