Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
14. Februar 2011

15. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Isolierte Singularitäten)

Bestimme die Singularitäten der folgenden Funktionen. Dabei gebe man jeweils den Typ der Singularität an:

$$\text{a)}\quad f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}\,; \quad \text{b)}\quad f_2(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\,; \quad \text{c)}\quad f_3(z) = \cos\frac{1}{z}\,.$$

(Zum Typ der Singularitäten siehe Seiten 186-187 im Buch.)

Aufgabe G2 (Laurent-Reihen)

Entwickle die Funktion $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$

(a) in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ und bestimme ihren Konvergenzradius.

(b) in eine Laurent-Reihe um $z_0 = -1$ für $z:\ 0 < |z+1| < 4$.

(c) in eine Laurent-Reihe um $z_0 = -2$ für $z:\ 1 < |z+1| < 5$.

Hinweis: Verwende die geometrische Reihe.

Aufgabe G3 (Potenzreihen, Cauchy-Produkt)

Gegeben sei die Funktion $f(z) = e^{z^2+z}$. Bestimme $f^{(7)}(0)$.
Hinweis: Entwickle die Funktion $f(z)$ in eine Potenzreihe um 0. Verwende dabei die Cauchy-Produkt-Formel auf Seite 131(31).

Hausübung

Für die Lösung von Aufgaben aus dieser Hausübung werden keine Punkte vergeben. Die Lösung wird im Rahmen einer Hörsaalübung vorgestellt.

Die ersten drei Aufgaben sind ausgewhlte Stichproben aus den geübten Themen, die zur Wiederholung gedacht sich. Damit kannst du selbst kontrollieren, ob du mit dem gelernten Material zurechtkommst.

Die letzte Aufgabe gehört zum Thema Residuensatz, der sehr wichtig für die Anwendungen ist. Mit der Formel aus dem Residuensatz lassen sich einige reelle Integrale ausrechnen, die mit den Methoden aus dem reellen Analysis nur schwer zugänglich waren. Für die Klausur ist dieses Thema aber nicht relevant.

Aufgabe H1 (Vektoranalysis)

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit Definitionsbereich $[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch

$$\Phi(u, v) = (\cos u \cdot \cos v, \sin u \cdot \cos v, \sin v)^T,$$

und sei $\mathcal{F}$ die durch Φ parametrisierte Fläche. Der Weg $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschreibe den Rand $\partial\mathcal{F}$ der Fläche $\mathcal{F}$. Weiterhin sei die Funktion

$$H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

gegeben durch

$$H(x, y, z) = (y, x^2, x^2 + y^2).$$

(i) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{F}$.

(ii) Berechnen Sie

$$\int_{\partial\mathcal{F}} H \cdot dY$$

unter Verwendung des Integralsatzes von Stokes.

(iii) Sei $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Weg, der den Rand $\partial D(\Phi)$ von $D(\Phi)$ beschreibt. Sei Y wie oben definiert.
Berechnen Sie nun das Integral aus Teil (ii) als Wegintegral.

Aufgabe H2 (Differentialgleichungen)

Wählen Sie ein geeignetes Verfahren zur Lösung folgender gegebener Differentialgleichungen:

a)

$$y'(x) = \frac{y^2 + x^2}{xy}, \quad x > 0$$

b)

$$y' + 8xy^2 - 4x(4x + 1)y = -8x^3 - 4x^2 + 1$$

Hinweis : hier lautet eine spezielle Lösung $u(x) = x$.

c)

$$y''' + 6y'' + 9y' = 3x + \sin x$$

Aufgabe H3 (Laplace-Transformation)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem bestehend aus einem System erster Ordnung und den Anfangswerten $y_1(0) = -1$ und $y_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + y_1 + 2\dot{y}_2 + 3y_2 &= e^{-t} \\ 3\dot{y}_1 - y_1 + 4\dot{y}_2 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe H4 (Residuensatz)

(a) Berechne das Integral

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\,dz$$

mit Hilfe des Residuensatzes .

(b) Berechne das reelle Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}\,, \qquad a > 0.$$

Nehme dabei den Satz 20.2 zu Hilfe.