



14. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kurvenintegrale/Cauchysche Integralformel)

(a) Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale mit Hilfe der Definition 17.1 bzw. der Sätze 18.1 und 18.2.

- i. $\int_{|z|=1} \bar{z} dz$
- ii. $\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz$
- iii. $\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$
- iv. $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-2z-3} dz$

(b) Berechnen Sie das unter i. gegebene Integral mit Hilfe des Satzes 17.1.

Aufgabe G2 (Komplexe Wegintegrale/Berechnung durch eine Stammfunktion)

a) Es sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, welcher von 1 nach πi führt. Berechnen Sie $\int_{\gamma} z e^z dz$.

b) Es sei $K = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$ ein Weg in der komplexen Ebene. Dabei seien K_1 bzw. K_3 Geradenstücke von $z_1 = 2\pi$ nach $z_2 = \frac{3\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$ bzw. $z_3 = \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$ nach $z_4 = i\frac{\pi}{2}$, und K_2 sei ein Halbkreis um $z_5 = \pi + i\frac{\pi}{2}$ vom Radius $\frac{\pi}{2}$.
Skizzieren Sie K und bestimmen Sie $\int_K e^{\sin 2z} \cos 2z dz$.

Aufgabe G3 (Komplexe Wegintegrale)

Wählen Sie die jeweils geeignete Methode um folgende Aufgaben zu lösen.

a) Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral der Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}^2 + 1$ entlang des Viertelkreises um 0, der die Punkte R und iR verbindet.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz,$$

wobei C der positiv orientierte Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, $2+i$, $2-i$ ist.

Aufgabe G4 (Komplexe Wegintegrale/Partialbruchzerlegung)

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \frac{\cosh z \, dz}{(z+1)^2(z-1)},$$

wobei C eine positiv orientierte, doppelpunktfreie, geschlossene, stückweise glatte Kurve ist, die die Punkte $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ einmal umläuft.