Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
31. Januar 2011

13. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Komplexe Funktionen)
Was ist die Bildmenge des Bereichs

$$A = \{z \in C : (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) > 1),\ \text{und } \operatorname{Re} z > 0,\, \operatorname{Im} z > 0\}$$

unter der Abbildung $z = z^2$?

Aufgabe G2 (Komplexe Funktionen)
Sei $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C}/\{0\}$.

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil dieser Funktion.

b) Bestimmen Sie die Bildmenge des Kreises $|z| = 1$.

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion.

Aufgabe G3 (Differentiation komplexer Funktionen)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}, \\ f_2(z) &= \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ f_3(z) &= \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

holomorph sind. Wenn ja, berechnen Sie die Ableitungen.

Aufgabe G4 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

(a) Wir betrachten die Funktion

$$u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bestimme alle Funktionen $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ derart, dass $u + iv\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Verfahre analog für $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $u(x + iy) := x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^{-y} \cos x$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Komplexe Funktionen)
(3 Punkte)
Sei die Abbildung $z \mapsto \sin(z)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Linien, die parallel zur realen Achse sind, auf Ellipsen und dass die Linien, die parallel zur imaginären Achse sind, auf Hyperbeln abgebildet werden. Skizzieren Sie diese Ellipsen und Hyperbeln.

Hinweis:
$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \sin(iy)\cos x \\ &= \sin x \cdot \cosh y + i \sinh y \cos x, \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Komplexe Differenzierbarkeit)
(4 Punkte)

Satz: Sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine komplexe Funktion. Die Funktionen u und v seien in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) partiell differenzierbar, und die partiellen Ableitungen seien im Punkt $(x_0.y_0)$ stetig. Ausserdem seien die Cauchy-Riemannschen Dgln. im Punkt (x_0, y_0) erfüllt. Dann ist f im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar. Bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{C}$, in denen die folgenden Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:

$$\begin{aligned} f_1 \colon x+iy &\mapsto xy + ixy \\ f_2 \colon x+iy &\mapsto x^4y^3 + ix^3y^4 \\ f_3 \colon x+iy &\mapsto y^2 \sin x + iy \\ f_4 \colon x+iy &\mapsto \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Integration komplexer Funktionen)
(3 Punkte)
Wir betrachten die Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Halbachsen $a > 0$, $b > 0$. Sei $\gamma(t)$ der Weg, der die obere Hälfte der Ellipse von a nach $-a$ durchläuft.
Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz$.

Aufgabe H4 (Cauchysche Integralformeln)
(3 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

$$\int_{C_i} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, dz, \quad i = 1, 2, 3,$$

wenn

a) $C_1 \equiv \{z(t) = 2 + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$
b) $C_2 \equiv \{z(t) = 2 + 3e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$
c) $C_3 \equiv \{z(t) = 2 + 5e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$