



12. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kurven)

Zeichne die in a) – c) gegebenen Kurven. Sind diese Kurven geschlossen, doppelpunktfrei, glatt oder stückweise glatt? Bei geschlossenen, doppelpunktfreien Kurven gebe man auch an, ob die Kurve positiv oder negativ orientiert ist.

- (a) $K_1 = \{z_1(t) = 1 + i + e^{it}, t \in [0, 3\pi]\}$;
- (b) $K_2 = \{z_2(t) = a \cos t + ib \sin t, t \in [0, 2\pi], \{a, b\} \subset \mathbb{R}^+\}$;
- (c) $K_3 = \{z_3(t) = t + i|t|, t \in [-1, 1]\}$;

Aufgabe G2 (Mengen)

Skizziere die folgenden Mengen $M_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Welche dieser Mengen sind zusammenhängend, einfach zusammenhängend, welche sind Gebiete?

- (a) $M_1 = \{z : |z + 1 - i| \leq 1\}$;
- (b) $M_2 = \{z : \operatorname{Re}(z + 2) > 3\}$;
- (c) $M_3 = \{z : \operatorname{Re}(z - 2) < 3\} \cap \{z : |z - 2| \geq 1\}$;
- (d) $M_4 = M_1 \cup M_2$;

Aufgabe G3 (Folgen)

Überprüfe die Folgen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

- (a) $z_n = \frac{3n^5+1}{n^5+2n} + i(1 + \frac{1}{n})^n$;
- (b) $z_n = e^{i\pi n}$;

Aufgabe G4 (Reihen)

Untersuche die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3i)n}{(1-i)^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{i^n}{2})$.
- (c) Bestimme den Konvergenzradius für die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{6-8i}{100})^k (z-i)^k$.

Hinweis: a) Wurzelkriterium,

b) Prüfe die notwendige Konvergenz-Bedingung,

c) Wurzelkriterium.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kurven)

(1+1 Punkte)

Zeichne die in a), b) gegebenen Kurven. Sind diese Kurven geschlossen, doppelpunktfrei, glatt oder stückweise glatt?

(a) $K_1 = \{z_1(t) = (t\pi - \sin(t\pi)) + i(1 - \cos(t\pi)), t \in [0, 4]\}$ (Zykloide);

(b) $K_2 = \{z_2(t) = \cos t + i \sin 2t, t \in [0, 2\pi]\}$ (Lemniskate).

Aufgabe H2 (Mengen)

(1+1 Punkte)

Skizziere die folgenden Mengen $M_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$. Welche dieser Mengen sind Gebiete?

(a) $M_1 = \{z : |\frac{z-1}{z+1}| \leq 1\}$;

(b) $M_2 = \{z : \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$;

Aufgabe H3 (Folgen)

(1+1+1 Punkte)

Überprüfe die Folgen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(a) $z_n = n^2 e^{-n} (\cos n + i \sin n)$;

(b) $z_n = i^n$;

(c) $z_n = \frac{n+in^2}{n^2-in}$;

Aufgabe H4 (Reihen)

(3+2 Punkte)

Bestimme die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die folgenden Reihen konvergieren. (Vergesse nicht die Randpunkte!)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{4+3i}{5z}\right)^n$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}$;

Hinweis: a) Wurzelkriterium.