



11. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rücktransformation)

Bestimme jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

- (a) $F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$ (Partialbruchzerlegung),
- (b) $F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$ (Differentiationssatz),
- (c) $F(s) = \frac{1}{(s-2)^4}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Aufgabe G2 (Anfangswertprobleme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Löse das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y^{(3)} - 6\ddot{y} + 12\dot{y} - 8y = e^{2t}, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0.$$

Hinweis: $s^3 - 6s^2 + 12s - 8 = (s - 2)^3$.

Aufgabe G3 (Anfangswertprobleme für lineare Systeme von DGL mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem bestehend aus einem System erster Ordnung und den Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 - 3y_1 - 3y_2 &= t, \\ \dot{y}_2 + y_1 + y_2 &= 1.\end{aligned}$$

Hinweis: Die Lösungen des LGS für Y_1, Y_2 enthalten beide den Faktor $\frac{1}{s}$. Eine direkte Konsequenz des Faltungssatzes 12.4 ist (indem man dort $g := 1$ setzt):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} = \int_0^t f(u) du.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Rücksubstitution)

(2+1.5+1.5 Punkte)

Bestimme jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

- (a) $F_1(s) = \frac{s+4}{s^2+4s-5}$ (Partialbruchzerlegung),
- (b) $F_2(s) = \ln(s+2) + \ln(s+1)$ (Differentiationsatz),
- (c) $F_3(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Aufgabe H2 (Anfangswertprobleme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

(4 Punkte)

Löse das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y'' + \omega^2 y = 2\omega \cos \omega t$$

mit $\omega > 0, y(0) = y_0, y'(0) = y_1$.

Hinweis:

$$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} = -\frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Aufgabe H3 (Anfangswertprobleme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

(3 Punkte)

Löse das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{y} + 6y = \sin^2 t + 1, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$