Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
10. Januar 2011,.

10. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Potenzreihen-Ansatz)

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, $i = 1, 2, 3, \dots$ in der Reihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2 y + 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

und geben Sie eine allgemeine Formel für die Koeffizienten des Potenzreihenansatzes für y an.

Aufgabe G2 (Randwertproblem)

Von folgenden Randwertaufgaben sind die Lösbarkeitseigenschaften festzustellen. Setzen Sie die allgemeine Lösung in die beiden Randbedingungen ein und bestimmen Sie daraus die freien Konstanten in der allgemeinen Lösung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Berechnung von $\Delta := \det R$ mit Hilfe des Alternativsatzes. Überführen Sie dafür das gegebene RWP wenn nötig in ein halbhomogenes RWP mit einer homgogenen DGL. Wo eine eindeutige Lösungen existiert, ist diese zu bestimmen.

(a) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1$

(b) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

(c) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(d) $y'' + y = x - \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

Aufgabe G3 (Eigenwertproblem)

Gegeben sei das vollhomogene Randwertproblem (RWP)

$$y''(x) + 2y'(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0,$$

wobei λ ein Parameter, der sogenannte Eigenwertparameter, ist. Die Lösungseigenschaften des RWP's hängen vom Wert des Eigenwertparameters ab. Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen des RWP zu bestimmen, führen Sie folgende Schritte durch:

(i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ das Fundamentalsystem der homogenen DGL. (*Hinweis:* Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda > -1, \lambda = -1$ und $\lambda < -1$.)

(ii) Stellen Sie die Matrix R und den Vektor γ auf und ermitteln anhand der Bedingung $\det R = 0$ diejenigen λ, für die das Randwertproblem Lösungen hat.

Hausübung

Aufgabe H1 (Randwertproblem (3P))

Gegeben sei das Randwertproblem (RWP)

$$y'' = x, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

(a) Geben Sie dann die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL an und lösen Sie das RWP. Setzen Sie dazu die allgemeine Lösung in die beiden Randbedingungen ein und bestimmen Sie daraus die freien Konstanten in der allgemeinen Lösung.

(b) Wenden Sie die Determinantenbedingung auf das Fundamentalsystem der homogenen DGL für die gegebenen Randbedingungen an, um zu zeigen dass eine eindeutige Lösung des RWP existiert.

Aufgabe H2 (Randwertproblem (4P))

Überprüfen Sie die Lösbarkeit der gegebenen Randwertprobleme mit Hilfe des Alternativsatzes und geben Sie ggf. die Lösungen an.

(a) $y'' - y = 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0$

(b) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos(x), \quad y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0.$

Aufgabe H3 (Eigenwertproblem (3P))

Bestimmen Sie die Eigenwerte des Problemes

$$y'' - 2y' + (1-\lambda)y = 0 \qquad y(0) = y(\pi) = 0\ .$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.