Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
20. Dezember 2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare DGL'n mit konstanten Koeffizienten)

Man bestimme die reellen Lösungen der folgenden DGL

a) $y'' - y' = e^x$

b) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

c) $y'' + 4y = x$

mit Hilfe des Ansatzes vom Typ der rechten Seite.

Kreuzen Sie den richtigen Ansatz für die inhomogene Lösung y_p an:

a) [ ] $y_p = c_1 x e^x$ [ ] $y_p = c_1 x e^{-x}$ [ ] $y_p = c_1 e^x$

b) [ ] $y_p = c_1 x e^{2x}$ [ ] $y_p = c_1 e^{2x}$ [ ] $y_p = c_1\, 2x$

c) [ ] $y_p = e^x$ [ ] $y_p = c_1 x$ [ ] $y_p = c_0 + c_1 x$

Aufgabe G2 (Systeme homogener DGL'n)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

a) Geben Sie das äquivalente System erster Ordnung an.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Frobeniusmatrix sowie die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Geben Sie die Lösungen an. Stellen diese ein Fundamentalsystem dar?

d) Vergleichen Sie die Lösungen mit der direkten Lösung der gegebenen DGL und begründen Sie mit Hilfe der Wronsky-Determinante, dass diese ein Fundamentalsystem darstellen.

Aufgabe G3 (Systeme homogener DGL'n)

Gegeben ist das homogene Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}^{\,'} = A\vec{y} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{y}(0) = \vec{u}$$

a) Ist die Matrix A diagonalähnlich? Berechnen Sie den Eigenvektor und geben Sie eine Lösung des homogenen Systems an.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems der gegebenen Differentialgleichung mit Hilfe der Beziehung

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{u}; \quad e^{xA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(xA)^j}{j!}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare DGL'n mit konstanten Koeffizienten (3 Punkte))
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 7y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0.$$

Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle -1. Testen Sie die Lösungen auf lineare Unabhängigkeit mit Hilfe der Wronski-Determinanten, für $x_0 = 0$.

Aufgabe H2 (Systeme homogener DGL'n (4 Punkte))

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

b) Bestimmen sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Aufgabe H3 (Potenzreihen-Ansatz (3 Punkte))
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1-x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ der Potenzreihe.

(b) Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Aufgabe H4 (Potenzreihen-Ansatz (4 Punkte))
Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die Lösung $y(x)$ sowie der Potenzreihe für die Sinusfunktion die ersten sieben Glieder der Potenzreihe der Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = \sin(x) \cdot y\ , \quad y(0) = 1.$$

Vergleichen Sie das so erhaltene Polynom $P_7(x)$ 7. Grades mit der exakten Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems (Trennung der Veränderlichen!), indem Sie sowohl $y(\frac{1}{2})$ als auch $P_7(\frac{1}{2})$ berechnen.