Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
6. Dezember 2010

7. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Löse die folgenden Differentialgleichungen:

Aufgabe G1 (Reduktion der Ordnung, die Funktion y tritt nicht direkt auf)

$$x^2 y'' = (y')^2.$$

Lösung: Mit der Substitution $z = y'$ erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$x^2 z' = z^2 \quad (\text{oder } \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2}).$$

Mit der Trennung der Veränderlichen erhält man die Lösungen:

$$z(x) = \frac{x}{xc_1 + 1},\ x \neq 1/c_1,\ z(x) \equiv 0.$$

Also gilt $y' = \frac{x}{xc_1+1}$ (1) und $y' = 0$ (2). Falls $c_1 = 0$, dann ist aus (1) $y = \frac{x^2}{2} + c_2$ eine Lösung. Nach dem Integrieren erhält man aus (1) noch eine Lösung für $c_1 \neq 0$: $y = \frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \ln|c_1 x + 1| + c_3$. Und aus (2) bekommt man noch eine Lösung der Gleichung $y(x) = c_4$.

Aufgabe G2 (Reduktion der Ordnung, die Variable x tritt nicht direkt auf)

$$2yy'' = (y')^2 + 1.$$

Hinweis: Substituiere: $y'(x) = p(y(x))$.

Lösung: Sei $y' = p(y)$. Dann gilt

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y))}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p.$$

Setzen wir $y' = p$ und $y'' = p' \cdot p$ in die Gleichung ein, dann erhält man $2yp \cdot p' = p^2 + 1$. Mit Trennung der Veränderlichen erhält man die Lösung:

$$p = \pm\sqrt{cy - 1},\ y \neq 1/c.$$

Wir können setzen $c \neq 0$. Daraus folgt:

$$y' = \pm\sqrt{cy - 1}.$$

Schließlich ist $4(cy - 1) = c^2(x + c_2)^2$ und daher $y = \frac{c}{4}(x + c_2)^2 + \frac{1}{c}$.

Aufgabe G3 (Reduktion der Ordnung, lineare Gleichung)

$$x^2y'' - xy' + y = 0.$$

Hinweis: $y_1(x) = x$ ist eine Lösung der DGL.

Lösung: Wir machen den Ansatz $y = xu$. Dann gilt

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \iff u''x + u' = 0.$$

Die Substitution $v = u'$ liefert die DGL $v'x + v = 0$. Diese kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; v(x) = \frac{c_1}{x} \;\Rightarrow\; u(x) = c_1 \ln|x| + c_2 \Rightarrow y(x) = x(c_1 \ln|x| + c_2).$$

Aufgabe G4 (Fortsetzbarkeit der Lösung)

Seien die Anfangswertprobleme

$$y' = y^2 + 1,\; y(0) = 0 \tag{1}$$

und

$$y' = y,\; y(0) = 1 \tag{2}$$

gegeben. Löse diese Probleme analytisch. Sind die Lösungen für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert? Kann man das Ergebnis für (2) auch aus der Lipschitzbedingung erschliessen ohne explizite Bestimmung der Lösung? Warum liefert dieselbe Schlussweise für (1) ein anderes Ergebnis?

Lösung: Sowohl die Lösung vom Problem (1): $y(x) = \tan x$ als auch die Lösung vom Problem (2): $y(x) = e^x$ erhält man mit Trennung der Veränderlichen. Die Lösung vom (2) ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, während die Lösung vom (1) nur für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Die rechte Seite vom (2) erfüllt eine Lipschitz-Bedingung für alle $y \in \mathbb{R}$. Deshalb lässt sich die Lösung aus der Umgebung vom Punkt $x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ fortsetzen. Die Funktion $y^2 + 1$ ist zu steil und erfüllt die Lipschitz-Bedingung nicht. Das führt dazu, dass die Lösung vom (2) z. B. nicht über den Punkt $x = \pi/2$ fortgesetzt werden kann. Die Lipschitz-Bedingung ist nicht notwendig für die Fortsetzbarkeit der Lösung. Aber sie reicht aus, um die Fortsezbarkeit zu garantieren.

Hausübung

Löse die folgenden Differentialgleichungen:

Aufgabe H1 (Reduktion der Ordnung, die Funktion y tritt nicht direkt auf)
(**4 Punkte**)

$$2xy'y'' = (y')^2 - 1.$$

Lösung: Die Substitution $u = y'$ liefert die DGL $2xuu' = u^2 - 1$, die mit der Methode Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann. Die konstanten Lösungen sind $u \equiv 1$ und $u \equiv -1$.

$$\begin{aligned} 2\frac{uu'}{u^2-1} = \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{d(u^2-1)}{u^2-1} \\ \ln|u^2-1| \quad &= \quad \ln(c_1|x|),\ c_1 > 0 \iff u^2 - 1 = c_1 x,\ c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für $c_1 = 0$ bekommen wir wieder die konstanten Lösungen $u = \pm 1$ und somit die Lösungen $y = \pm x + c_2$ der ursprünglichen Gleichung. Sei $c_1 \neq 0$. Die Gleichung $y' = \pm\sqrt{c_1 x + 1},\ x \geq -1/c_1$ lösen wir dann mit der Methode Trennung der Veränderlichen. Es gilt $y = \pm\frac{2}{3c_1}(c_1 x + 1)^{3/2} + c_3$. Die Lösungen sind daher $y = \pm x + c_2$ und $y = \pm\frac{2}{3c_1}(c_1 x + 1)^{3/2} + c_3,\ x \geq -1/c_1$.

Aufgabe H2 (Reduktion der Ordnung, die Variable x tritt nicht direkt auf)
(**4 Punkte**)

$$y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0.$$

Hinweis: Substituiere: $y'(x) = p(y(x))$.

Lösung: Sei $y' = p(y)$. Dann gilt $y'' = p'p$. Die Substitutionen $y' = p$ und $y'' = p'p$ liefern

$$p'p + 2yp^3 \quad = \quad 0.$$

Die konstante Lösung $p \equiv 0$ ergibt die Lösung $y \equiv c_1$. Mit Trennung der Veränderlichen erhält man

$$\frac{p'}{p^2} = -2y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} = y^2 + c_2 \iff p = \frac{1}{y^2 + c_2},\ y^2 \neq -c_2.$$

Und somit folgt aus $y' = \frac{1}{y^2+c_2}$, dass $y^3/3 + yc_2 = x + c_3$ eine Lösung ist. Wir haben daher die Lösungen $y \equiv c_1$ und $y^3/3 + yc_2 = x + c_3$.

Aufgabe H3 (Lineare Unabhängigkeit von Funktionen)
(**3 Punkte**)
Für $x > 0$ sei die DGL $x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ gegeben. Überprüfe, ob die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ linear unabhängige Lösungen dieser DGL sind. Gib die allgemeine Lösung der DGL an.

Lösung: y_1 und y_2 lösen die Gleichung und bilden ein Fundamentalsystem, denn $\det W(y_1, y_2) = 2x(x+1) > 0$ für $x > 0$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.