



6. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lösung exakter Differentialgleichungen.)

Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung

$$(4x^2y^3 + x \cos y)y' + 2xy^4 + \sin y = 0$$

exakt ist. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

Aufgabe G2 (Lösung durch Übergang zur Umkehrfunktion)

Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen Anfangsproblems.

$$y'(x) = \frac{1}{2x - e^y}, \quad y(1) = 0.$$

Aufgabe G3 (Lipschitzbedingung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x^2} + x$, $y(1) = 0$.

Sei $0 < a < 1$ und sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - a < x, y \in \mathbb{R}\}$. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf E ? Berechnen Sie dann die Näherungslösungen y_1, y_2, y_3 mit Picarditeration ausgehend von der Anfangsnäherung $y_0(x) = 0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lösung exakter Differentialgleichungen.)

(3 Punkte)

Zeigen Sie dass folgende Differentialgleichung exakt ist und geben Sie die allgemeine Lösung an.

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Aufgabe H2 (Lipschitzbedingung)

(1+1+1 Punkte)

Gegeben sind folgende Funktionen. Erfüllt f eine Lipschitzbedingung bezüglich y auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$?

a) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2} y^2$

b) $f(x, y) = x^2 + 2y$

c) $f(x, y) = \frac{1}{1-x} y$

Aufgabe H3 (Spezielle Differentialgleichung erster Ordnung.)

(3+1 Punkte)

Sei die Differentialgleichung $2(y + y') = x + 3$ gegeben.

a) Finden Sie die analytische Lösung zur Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

b) Berechnen Sie 2 Näherungslösungen mit Hilfe des Picard-Lindelöf-Iterationsverfahrens. Starten Sie mit $u_0(x) = 0$.