Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS2010/11
15.11.2010

Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

4.Übung

Präsenzaufgaben

G1 (Multiple Choice)

Kreuze alle richtigen Antworten an: Die folgenden Differenzialgleichungen sind:

	linear	nicht linear	implizit	explizit	autonom
$y'(x) = f(x)y(x)$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$y'(x) = 1 + x + y(x)$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$y'(x) = y^2(x)$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$y''(x) = (y'(x))^2 + y(x)$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$sin(xy'(x)) = 0$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$(yy^{(5)})^2 + xy'' + ln(y) = 0$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$y' = xy^2$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$y''(x) = -\frac{(y'(x))^2}{-5y(x)}$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
$y'(x) = sin(y(x))$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]

G2 (Richtungsfelder)

Zu einer expliziten Differentialgleichung 1.Ordnung

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

läßt sich das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x, y) \mapsto (1, f(x, y))$$

zuordnen. F ist das so genannte **Richtungsfeld** der Differentialgleichung. Mit einer Lösung wird eine in D verlaufende differenzierbare Kurve $y = y(x)$ gesucht, deren Tangentenanstieg $\tan\phi = y'(x)$ in jedem Kurvenpunkt gleich $f(x, y)$ ist. Zeichnet man in jedem Punkt $(x, y) \in D$ eine kurze Strecke mit Steigung $\tan\phi = f(x, y)$, läßt sich das Richtungsfeld der DGL visualisieren. Es ist $y(x)$ genau dann eine Lösungskurve der DGL, wenn sie eine Feldlinie dieses Richtungsfeldes ist; d.h., wenn in jedem Kurvenpunkt das dort zugeordnete Linienfeld tangential verläuft.

i) Zeichne das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen

   a) $\frac{dy}{dx} = p \quad p \in \mathbb{R}$ b) $\frac{dy}{dx} = qy, \quad q \in \mathbb{R}$

   in Abhängigkeit von p und q.

ii) Wie sieht eine Lösung der Differentialgleichungen im Richtungsfeld aus. Zeichne Lösungen in deine Richtungsfelder.

G3 (Gerüchteküche und beschränktes Wachstum)

In einer Population der Größe N werde ein Gerücht durch Mundpropaganda verbreitet, d.h., ein Mitglied der Population erfährt das Gerücht (ausschließlich) dadurch, dass ein anderes Mitglied es ihm oder ihr erzählt. Es sei $I(t)$ die Anzahl der Informierten zum Zeitpunkt t. Jeder Informierte habe in einer Zeiteinheit $k > 0$ Kontakte mit anderen Mitgliedern der Population.

i) Bestimme -unter der idealisierenden Annahme, dass $I(t)$ eine differenzierbare Funktion ist-, die DGL, die $I(t)$ bestimmt. *Hinweis:* Wieviele uninformierte Mitglieder werden während einer Zeiteinheit informiert?

ii) Zeichne das Richtungsfeld der DGl für $N = 4$ und $k = 1$ und diskutiere dein Ergebnis in der Gruppe.

Hausaufgaben

H1 (Potentiale) **(3 + 2 Punkte)**

Wir betrachten die Vektorfelder $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(1)\ f(X) = \begin{pmatrix} 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ g(X) = \begin{pmatrix} e^{x_2}\sin x_1 \\ e^{x_2}\cos x_1 \end{pmatrix} \qquad (3)\ h(X) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} .$$

i) Besitzen f, g, h jeweils ein Potential? Gib gegebenenfalls eine Potentialfunktion φ an.

ii) Betrachte den durch $Y(t) = (\cos(t), 2\sin(t))$ für $t \in [0, \pi/2]$ gegebenen Weg W. Bestimme das Wegintegral $\int_W h \cdot dY$.

H2 (Potentiale erzeugen keine Wirbelfelder) **(2 + 1 Punkte)**

i) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $D(f)$ offen eine zweimal stetig differenzierbare, skalare Funktion. Zeige, daß $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

ii) Sei $E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $D(E)$ offen stetig differenzierbar mit Potential ϕ $R^3 \to \mathbb{R}$ mit $D(\phi) = D(E)$. Zeige, daß dann $\operatorname{rot} E = 0$ gilt.

H3 (Stromdurchflossener Leiter) **(2 + 2 + 2 Punkte)**

Das magnetische Feld eines unendlich langen, stromdurchflossenen Leiters sei gegeben durch

$$B(X) = \frac{I}{x^2 + y^2}(-y, x, 0) ,$$

wobei I der Strom ist.

i) Zeige, daß B quellen- ($\operatorname{div} B = 0$) und wirbelfrei ($\operatorname{rot} B = 0$) ist.

ii) Zeige, daß B auf $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0\}$ ein Potential besitzt, auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ aber kein Potential besitzt.

Der so genannte *Poynting Vektor* $S = \frac{1}{\mu_0} E \times B$ mit $\mu_0 \in \mathbb{R}$ bezeichnet den Energiefluß eines elektromagnetischen Feldes. Der Betrag $|S|$ gibt die Intensität der Strahlung an.

iii) Betrachte den stromdurchflossenen Leiter. Das elektrische Feld ist gegeben durch $E(X) = \mu_0 I \cdot (0, 0, 1)^T$. Sei $Z := \{X \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechne den Energiefluß pro Zeiteinheit durch die Zylinderoberfläche:

$$\int_{\partial Z} S \cdot n \, d\sigma .$$