Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
8. November 2010

3. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Flächeninhalt)

Berechne den Oberflächeninhalt desjenigen Teils des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$ liegt.

Aufgabe G2 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$)

(a) Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ und $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy + 1 \\ -e^y \end{pmatrix}$. Berechne $\int_{\partial\Omega} f(s) \cdot ds$ mit Hilfe des Satzes von Stokes in $\mathbb{R}^2$.

(b) Sei $v(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ ein Vektorfeld. Bestimme $\int_{\partial S} v(s) \cdot ds$ mit Hilfe des Satzes von Stokes in $\mathbb{R}^3$, wobei ∂S die Schnittkurve des Zylinders $x^2+y^2 = 1$ mit der Ebene $x+y+z = 1$ ist.

Aufgabe G3 (Satz vom Gauss)

Man nennt den Punkt (x, y, z) eine Quelle bzw. Senke, wenn $\mathrm{div}v(x, y, z) > 0$ bzw. $\mathrm{div}v(x, y, z) < 0$ ist. Das Vektorfeld v heißt quellenfrei, wenn überall $\mathrm{div}v = 0$ gilt.
Bestimme den Fluss $\left(\int_{\partial K} v \cdot n \, d\sigma\right)$ des Feldes $v(x, y, z) = (2z, x + y, 0)^T$ durch die Oberfläche der Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$ (von innen nach außen). Hat v Quellen oder Senken?

Hausübung

Aufgabe H1 (Flächeninhalt)
(**3 Punkte**)
Durch den über dem Rechteck $D = \{(x,z) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$ liegenden Teil des Zylinders $y^2 + x^2 = 4$ sei das Flächenstück S in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Berechne das Oberflächenintegral von $\rho(x,y,z) = y^2$ über S. (Den erhaltenen Wert kann man z.B. als die Masse des Zylinderteilstücks mit der Dichte ρ interpretieren). *Hinweis:* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad a > 0.$

Aufgabe H2 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$)
(**3+3 Punkte**)

(a) Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y,\ y^2 \leq x\}$ und ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x + y^2,\ x^2 - 2xy)^T$ gegeben. Berechne $\int_{\partial\Omega} f(s) \cdot ds$.

(b) Sei ein Vektorfeld $v = (x, x+y, x+y+z)^T$ gegeben. Berechne die Zirkulation von v: $\int_{\partial S} v \cdot dS$ längs der Schnittkurve ∂S der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $z = \sqrt{3}/2$.

Aufgabe H3 (Satz von Gauss)
(**3 Punkte**)
Berechne den Fluss des Feldes $v = (xy^2, x^2y, y)^T$ durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$. Bestimme die Quellpunkte von v.