Prof. H. Alber
Dr. N. Kraynyukova, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS2010/11
01.11.2010

Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss

2.Übung

Präsenzaufgaben

G1 (Potentiale)

Berechne, sofern möglich, die Potentiale der folgenden Vektorfelder:

i) $F(x,y) = (2x, 2y)^T$ ii) $F(x,y) = (2y, 2x)^T$

iii) $F(x,y) = (x, xy)^T$ iv) $F(x,y,z) = (z\cos y, -zx\sin y + z, x\cos y + y)^T$.

G2 (Potential)

Gegeben sei das Vektorfeld $F_\alpha(x,y) = (e^{x+y} + \alpha xy, e^{x+y} + x^2)^T$
mit einem freien Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Bestimme α derart, daß F_α ein Potential besitzt. Bestimme dieses Potential.

ii) Berechne für $\alpha = 0$ und $X(t) = (t^2, t^3)^T,\ t \in [0,1]$, das Kurvenintegral

$$W = \int_K F_0(X) \cdot dX,$$

indem du F_0 geeignet als Summe zweier Vektorfelder schreibst.

G3 (Elektromagnetische Wellen)

Sei $\{ e_x, e_y, e_z \} \subset \mathbb{R}^3$ eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$. Mit $E = (E_x, E_y, E_z)$ und $B = (B_x, B_y, B_z)$ bezeichnen wir das elektrische bzw. das magnetische Feld. Sei durch $E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} e_x$ mit $\omega, k \in \mathbb{R}$ der elektrische Anteil einer in x-Richtung linear polarisierten Welle gegeben.

i) Zeige, daß dann $(\nabla \times E)_x = (\nabla \times E)_z = 0$ und $(\nabla \times E)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}$ erfüllt sind.

ii) Verwende die Maxwellsche Gleichung $\frac{\partial B}{\partial t} = -(\nabla \times E)$, um zu zeigen, daß $\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$ und $-\frac{\partial B_y}{\partial t} = -ikE_x$ gelten.

iii) Zeige, daß der magnetische Anteil der Welle durch $B = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i\omega t - kz} e_y$ gegeben ist.

Hausaufgaben

H1 (Punktladung) (5 × 1-Punkt)

i) Befindet sich eine Punktladung q im Punkt $X_0 = (0,0,0)$, so erzeugt sie an der Stelle X ein elektrisches Feld

$$E(X) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{X}{||X||^3} \ ,$$

wobei $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ die so genannte Dielektrizitätskonstante ist. Zeige, daß das Vektorfeld E ein Potential besitzt.

ii) Sei $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, daß das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ F(X) := h(||X||) \cdot X$$

ein Potential besitzt.

iii) Bestimme für das Vektorfeld E aus Teil i) die Potentialfunktion.

iv) Bestimme die Arbeit, die verrichtet werden muß, um eine Punktladung q' von X_1 nach X_2 mit $\|X_1\| = r_1 > 0$ und $\|X_2\| = r_2 > 0$ zu bewegen.

v) Bestimme die Arbeit, die verrichtet werden muß, um eine Punktladung q' im Punkt X mit $\|X\| = 1$ unendlich weit von der Ladung q zu entfernen.

H2 (Vektoranalysis) (2 × 2-Punkte)

Sei $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

Zeige, daß

a)
$$\begin{aligned} \|\varphi_u \times \varphi_v\| &= \sqrt{\|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2}, \\ \|\varphi_u\|^2 &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 \\ \|\varphi_v\|^2 &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 \\ \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \|\varphi_u \times \varphi_v\| &= \sqrt{1 + (z'_u)^2 + (z'_v)^2}, \quad \text{wenn} \\ x(u,v) &\equiv u, \quad y(u,v) \equiv v. \end{aligned}$$

H3 (Oberfläche) (3 Punkte)

Berechne den Oberflächeninhalt der Fläche, die durch die Parameterdarstellung

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} - u \\ u^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in D,$$

mit $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \le u \le v, \ 0 \le v \le 1\}$ gegeben ist.