Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Math. N. Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/11
25. Oktober 2010

1. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Polarkoordinaten)
Substituiere Polarkoordinaten (r, ϕ) zur Berechnung des Integrals $\int_G f(x, y)d(x, y)$ mit

(a) $G = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ a > 0\}$,

(b) $G = \{(x, y) :\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2,\ y \geq 0,\ 0 \leq a < b\}$,

(c) $G = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq ax,\ 0 \leq a\}$.

Aufgabe G2 (Einige dreidimensionale Körper)
Verwende eine passende Substitution, um das Volumen $\int_V d(x, y, z)$ der folgenden dreidimensionalen Körper zu berechnen:

(a) $V = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x > 0,\ y > 0,\ a > 0\}$,

(b) $V = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq a,\ a > 0\}$,

(c) $V = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq b,\ 0 < a, b\}$,

(d) $V = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq a,\ 0 < a\}$.

Aufgabe G3 (Länge eines Weges)
Betrachte den Weg

$$\alpha :\ [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = (t^2, t^3).$$

a) Skizziere die zum Weg gehörende Kurve α.
b) In welchen Punkten $\alpha(t)$ gilt $\alpha'(t) \neq (0, 0)$?
c) Berechne die Länge der Kurve α.
Hinweis: Beachte $\int x\sqrt{a^2 + x^2}\, dx = (1/3)\sqrt{(a^2 + x^2)^3}$

Aufgabe G4 (Wegintegrale skalarwertiger Funktionen)
In einer Junggesellenwohnung, deren Fußboden wir uns als die Halbebene

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

vorstellen, hat sich vor der Wand $x = 0$ eine Staubschicht angehäuft, deren Höhe $h(x, y) = 2e^{-x}$ beträgt (in Millimetern, an der Stelle $(x, y) \in H$, wobei x, y in Metern gemessen seien). Der junge

Mann bewegt den Staubsauger während einer Sekunde geradlinig auf einer Strecke Γ vom Punkt $(2,0)$ nach $(1,1)$. Zur Zeit $t \in [0,1]$ befinde sich die Düse des Saugers an der Stelle

$$\gamma(t) := (2-t^2, t^2).$$

Das momentan pro zurückgelegter Wegstrecke beim Passieren des Punktes $(x,y) \in \Gamma$ aufgenommene Volumen Staub betrage $f(x,y) = 0,2 \cdot h(x,y)$ (in Liter pro Meter). Berechne das Gesamtvolumen Staub, das längs der Strecke Γ eingesaugt wird.

Hausübung

Aufgabe H1 (Masse eines Körpers)
(**4 Punkte**)
Die Masse m eines Körpers $V \in \mathbb{R}^3$ mit der Massendichte $\rho(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wird mit Hilfe des folgenden Integrals bestimmt:

$$m = \int_V \rho(x,y,z) d(x,y,z).$$

Bestimme die Masse des Körpers $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ mit der Massendichte $\rho = \frac{1}{\alpha+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\alpha > 0$.

Aufgabe H2 (Zylinderkoordinaten)
(**5 Punkte**)
Bestimme das Volumen, welches innerhalb des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4\}$, über der Ebene $z = 0$ und unterhalb des durch die Gleichung $(x+2)^2 + y^2 = 4z$ gegebenen Paraboloids liegt.

Aufgabe H3 (Ein Wegintegral)
(**3 Punkte**)
Es sei W der Weg von $(0,0)$ nach $(1,0)$, der sich aus dem durch $X(t) = (t^2, t)$ mit $t \in [0,1]$ parametrisierten Weg W_1 und dem Geradenstück W_2 von $(1,1)$ nach $(1,0)$ zusammensetzt. Berechne das Wegintegral

$$\int_W F \cdot dX$$

für das Vektorfeld

$$F(x,y) = (2xy - x^2,\, x + y^2).$$