Lineare Algebra II
12. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
13. / 14. Juli 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Probeklausur)
Sprechen Sie über die Probeklausur von letzter Woche. Klären Sie alle Fragen, die daraus verblieben sind, mit Ihrem Übungsleiter.

Aufgabe G2 (Minitest)

(a) ☐ Es gibt Matrizen, die sowohl positiv definit als auch negativ definit sind.

☒ Jede Matrix über $\mathbb{C}$ besitzt eine Jordan-Normalform.

☐ Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts gibt die Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert an.

☒ Jordanblöcke der Größe n sind nur diagonalisierbar, wenn $n = 1$.

☒ Die Jordan-Normalform einer reellen symmetrischen Matrix ist eine Diagonalmatrix.

☒ Eine Matrix und ihre Jordan-Normalform haben die gleiche Determinante und die gleiche Spur.

(b) Welche der folgenden Matrizen liegen in Jordan-Normalform vor?

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(b) In Jordan-Normalform liegen A_2, A_6, A_7 und A_8 vor.

Aufgabe G3 (Jordan-Normalform durch Rangberechnung)
In dieser Aufgabe sehen Sie, wie man die Jordan-Normalform einer Matrix nur durch die Berechnung von Dimensionen der Kerne (oder alternativ: der Ränge) von Matrixpotenzen bestimmen kann.

(a) Wir betrachten eine 12×12-Matrix A mit folgender Jordan-Normalform:

$$J = \left(\begin{array}{c|cc|cc|ccc|cccc}
\lambda & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & \lambda & 1 & & & & & & & & & \\
 & & \lambda & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & & & \lambda & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & \lambda & 1 & & & & & \\
 & & & & & & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & & & & & \lambda & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \lambda & 1 & \\
 & & & & & & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right).$$

i. Bestimmen Sie $a_k := \dim\ker(A - \lambda E_{12})^k$ für $k = 1,2,3,4$.

ii. Wie können Sie aus a_1 und a_2 die Anzahl der Jordanblöcke der Größe 1 ablesen?

iii. Bestimmen Sie die Anzahl der Jordanblöcke der Größen 3 und 4 durch Betrachtung der anderen beiden Dimensionen.

iv. Geben Sie eine Formel an, welche die Anzahl der Jordanblöcke der Größe $m \in \mathbb{N}$ nur aus den Zahlen a_{m-1}, a_m und a_{m+1} berechnet (für eine beliebige Matrix A).

(b) Gegeben seien 10×10-Matrizen A, B, C, die nur den Eigenwert 42 besitzen. Diese erfüllen außerdem

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\dim\ker(A - 42E_{10})^k$	4	7	9	10
$\dim\ker(B - 42E_{10})^k$	4	8	10	10
$\dim\ker(C - 42E_{10})^k$	3	6	8	10

Geben Sie jeweils eine Jordan-Normalform an.

Lösung:

(a) Die gesuchten Dimensionen berechnen wir direkt von J, da sie unter Ähnlichkeit invariant sind.

i. Wir lesen die Dimensionen (oder die Ränge) ohne Rechnung ab:

$$\begin{aligned} a_1 &:= \dim\ker(A - \lambda E_{12})^1 = 5 \\ a_2 &:= \dim\ker(A - \lambda E_{12})^2 = 9 \\ a_3 &:= \dim\ker(A - \lambda E_{12})^3 = 11 \\ a_4 &:= \dim\ker(A - \lambda E_{12})^4 = 12 \end{aligned}$$

ii. Die Zahl a_1 gibt die geometrische Vielfachheit von λ und damit die Anzahl der Jordanblöcke von A an. Bilden wir nun $(A - \lambda E_{12})^2$, kommt für jeden Block, der mindestens die Größe 2 hat, eine weitere Nullspalte hinzu. Es gibt also $a_2 - a_1 = 9 - 5 = 4$ die Anzahl der Blöcke an, die mindestens Größe 2 haben. Da es insgesamt 5 Blöcke gibt, von denen 4 Stück mindestens die Größe 2 haben, gibt es also genau einen Block der Größe 1.

iii. Bei Bildung der dritten Potenz trägt jeder Block der Größe mindestens 3 wieder eine Nullspalte bei, ebenso bei Bildung der vierten Potenz und Blöcken der Größe 4. Es gibt also $a_3 - a_2 = 2$ Blöcke der Größe mindestens 3. Da es aber 4 Blöcke der Größe mindestens 2 gibt, bleiben insgesamt 2 Blöcke der Größe genau 2. Weiterhin gibt es $a_4 - a_3 = 1$ Block der Größe 4, so dass von den zwei Blöcken der Größe mindestens drei tatsächlich einer die Größe 3 und einer die Größe 4 hat. Damit haben wir die Anzahl aller Blöcke bestimmt.

iv. Wir haben bereits gesehen, dass die Anzahl der Blöcke der Größe mindestens m gegeben ist durch $a_m - a_{m-1}$. Wir folgern:

$$\begin{aligned} \#\{\text{Blöcke der Größe } m\} &= \#\{\text{Blöcke der Größe mindestens } m\} - \#\{\text{Blöcke der Größe mindestens } m+1\} \\ &= (a_m - a_{m-1}) - (a_{m+1} - a_m) = 2a_m - a_{m-1} - a_{m+1} \end{aligned}$$

(b) Wir gehen hier analog zu Aufgabenteil (a) vor. Jede dieser Matrizen besitzt eine Jordan-Normalform, so dass wir obige Betrachtungen einfach übertragen können. Es bezeichne s_m die Anzahl der Blöcke der Größe m. Natürlich ist $a_0 = 0$ und $a_5 = 10$, da ja bereits $a_4 = 10$ ist.

Matrix A: $s_1 = 2 \cdot 4 - 7 - 0 = 1$, also gibt es einen Block der Größe 1. Weiterhin ist $s_2 = 2 \cdot 7 - 9 - 4 = 1$, also gibt es einen Block der Größe 2. Analog berechnen wir $s_3 = 2 \cdot 9 - 10 - 7 = 1$ und $s_4 = 2 \cdot 10 - 10 - 9 = 1$. Es gibt also jeweils einen Block der Größen 3 bzw. 4.

Die Jordan-Normalform lautet also

$$\left(\begin{array}{c|cc|ccc|cccc}
42 & & & & & & & & & \\ \hline
 & 42 & 1 & & & & & & & \\
 & & 42 & & & & & & & \\ \hline
 & & & 42 & 1 & & & & & \\
 & & & & 42 & 1 & & & & \\
 & & & & & 42 & & & & \\ \hline
 & & & & & & 42 & 1 & & \\
 & & & & & & & 42 & 1 & \\
 & & & & & & & & 42 & 1 \\
 & & & & & & & & & 42
\end{array}\right)$$

Matrix B: Wir berechnen $s_1 = 2\cdot 4 - 8 - 0 = 0$, $s_2 = 2\cdot 8 - 10 - 4 = 2$, $s_3 = 2\cdot 10 - 10 - 8 = 2$ und $s_4 = 2\cdot 10 - 10 - 10 = 0$. Die Jordanform ist

$$\left(\begin{array}{cc|cc|ccc|ccc}
42 & 1 & & & & & & & & \\
 & 42 & & & & & & & & \\
\hline
 & & 42 & 1 & & & & & & \\
 & & & 42 & & & & & & \\
\hline
 & & & & 42 & 1 & & & & \\
 & & & & & 42 & 1 & & & \\
 & & & & & & 42 & & & \\
\hline
 & & & & & & & 42 & 1 & \\
 & & & & & & & & 42 & 1 \\
 & & & & & & & & & 42
\end{array}\right)$$

Matrix C: Wir berechnen $s_1 = 2\cdot 3 - 6 - 0 = 0$, $s_2 = 2\cdot 6 - 8 - 3 = 1$, $s_3 = 2\cdot 8 - 10 - 6 = 0$ sowie $s_4 = 2\cdot 10 - 10 - 8 = 2$. Die Jordanform ist

$$\left(\begin{array}{cc|cccc|cccc}
42 & 1 & & & & & & & & \\
 & 42 & & & & & & & & \\
\hline
 & & 42 & 1 & & & & & & \\
 & & & 42 & 1 & & & & & \\
 & & & & 42 & 1 & & & & \\
 & & & & & 42 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 42 & 1 & & \\
 & & & & & & & 42 & 1 & \\
 & & & & & & & & 42 & 1 \\
 & & & & & & & & & 42
\end{array}\right)$$

Aufgabe G4 (Kurze Beweise)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Matrix ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Hauptminoren eine nichtnegative Determinante haben.

(b) Jordanblöcke sind genau dann nilpotent, wenn sie zum Eigenwert 0 gehören.

(c) Es gibt Matrizen über $\mathbb{R}$, welche keine Jordan-Normalform über $\mathbb{R}$ besitzen.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch. So hat etwa die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Hauptminoren $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, deren Determinante jeweils 0 ist. Trotzdem hat sie den Eigenwert -1, ist also nicht positiv semidefinit.

(b) Die Aussage ist wahr. Sind auf der Diagonalen alle Einträge null, so ist A eine strikte obere Dreiecksmatrix und damit nilpotent. Hat A einen von null verschiedenen Eintrag λ auf der Diagonalen, so hat A^n an dieser Stelle den Eintrag $\lambda^n \neq 0$.

(c) Die Aussage ist wahr. Ein Beispiel ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sie besitzt keine Eigenwerte in $\mathbb{R}$ und damit auch keine Jordan-Normalform.

Aufgabe G5 (Jordan-Normalform)

(a) Zeigen Sie: in der Jordan-Normalform von A kommt genau dann ein Jordanblock der Größe mindestens k zum Eigenwert λ vor, wenn das Minimalpolynom von A von $(t-\lambda)^k$ geteilt wird.

(b) Berechnen Sie jeweils eine Jordan-Normalform der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} -18 & 7 & -4 \\ -34 & 13 & -8 \\ 45 & -18 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 13 & 10 & 6 & -7 \\ -14 & -10 & -6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} \qquad A_8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_9 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} := \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_{11} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{12} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{14} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{15} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist nicht geplant, dass Sie alle diese Matrizen in der Übung untersuchen. Sie können sie als Vorbereitung auf die Klausur transformieren, wenn Sie die Berechnung von Jordan-Normalformen üben möchten. Die Lösungen werden rechtzeitig vor der Klausur hochgeladen, damit Sie ihre Ergebnisse vergleichen und in den Sprechstunden nachfragen können, wenn Sie noch Schwierigkeiten haben.

Lösung:

(a) Wir wissen bereits, dass A und die Jordan-Normalform J das gleiche Minimalpolynom haben. Sei also

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1,\lambda}} & & & & \\ & \boxed{J_{m_2,\lambda}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{J_{m_r,\lambda}} & \\ & & & & \tilde{J} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{J}$ nicht den Eigenwert λ besitze. Das Minimalpolynom von A lautet also

$$\mu_A(t) = \mu_J(t) = \operatorname{kgV}(\mu_{J_{m_1,\lambda}}(t), \dots, \mu_{J_{m_r,\lambda}}(t), \mu_{\tilde{J}}(t)) = (t-\lambda)^m \cdot \mu_{\tilde{J}}(t),$$

wobei $m := \max\{m_1, \dots, m_r\}$ die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ angibt. Insbesondere sehen wir, dass $(t-\lambda)^k$ genau dann ein Teiler von $\mu_A(t)$ ist, wenn es mindestens einen Jordanblock der Größe mindestens k zum Eigenwert λ gibt, was zu zeigen war.

(b) Die Normalformen sind natürlich immer nur bis auf eine Permutation der Blöcke bestimmt.

A_1: Die Eigenwerte lauten $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$, die Matrix ist also diagonalisierbar und eine Jordan-Normalform lautet

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5+\sqrt{33} & 0 \\ 0 & 5-\sqrt{33} \end{pmatrix}.$$

A_2: Der einzige Eigenwert ist -1, mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2. Es gibt also 2 Jordanblöcke zum Eigenwert -1 und eine mögliche Jordan-Normalform lautet

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A_3: Die Eigenwerte sind -1 (mit algebraischer Vielfachheit 1) und 2 (mit algebraischer Vielfachheit 2). Die geometrische Vielfachheit von 2 ist 1, es gibt also nur einen Jordanblock zum Eigenwert 2 (und natürlich einen zum Eigenwert -1). Eine Jordan-Normalform ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A_4: Der einzige Eigenwert 1 hat geometrische Vielfachheit 1. Es gibt also nur einen einzigen Jordanblock, die Jordan-Normalform lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A_5: Die Eigenwerte sind 2, i und $-i$, die Matrix ist also diagonalisierbar mit Normalform

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

A_6: Der einzige Eigenwert -3 hat geometrische Vielfachheit 2. Eine Normalform lautet also

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

A_7: Die Eigenwerte sind offensichtlich -1, 1 und 42. Damit ist die Matrix diagonalisierbar mit Normalform

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

A_8: Die Eigenwerte sind -1 und 1, wobei 1 die algebraische und geometrische Vielfachheit 2 hat. Die Matrix ist also diagonalisierbar mit Normalform

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A_9: Die Eigenwerte sind 2 und 1, wobei 1 die algebraische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit nur 1 hat. Eine Normalform lautet daher

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A_{10}: Der einzige Eigenwert 2 hat geometrische Vielfachheit 1, so dass es nur einen Jordanblock gibt. Die Normalform lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A_{11}: Die beiden Eigenwerte sind 2 und 3, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 2. Die geometrische Vielfachheit von 2 ist 2, die geometrische Vielfachheit von 3 ist 1. Eine Normalform lautet daher

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A_{12}: Der einzige Eigenwert -1 hat geometrische Vielfachheit 2. Es gibt also bis auf Vertauschung der Jordanblöcke die beiden Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das Minimalpolynom der A_{12}. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(t) = (-1-t)^4.$$

Es ist $(A_{12}+E_4)^2 \neq 0$, aber $(A_{12}+E_4)^3 = 0$. Das Minimalpolynom lautet also $\mu(t) = (-1-t)^3$. Nach Aufgabenteil (a) muss daher ein Block der Größe 3 vorkommen, die richtige Normalform lautet also

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A_{13}: Hier gibt es die beiden Eigenwerte 0 und 3, jeweils mit geometrischer Vielfachheit 1 und algebraischer Vielfachheit 2. Die Jordanform ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A_{14}: Der einzige Eigenwert 1 hat geometrische Vielfachheit 2. Um die Jordanform zu bestimmen, berechnen wir das Minimalpolynom und wenden wieder Aufgabenteil (a) an. Es ist $(F-E_4)^2 \neq 0$, aber $(F-E_4)^3 = 0$. Das Minimalpolynom ist daher $\mu(t) = (t-1)^3$, es muss also einen Block der Größe 3 geben. Die Jordanform lautet demnach

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A_{15}: Es gibt hier nur den Eigenwert 2. Wir gehen analog zur Matrix A_{12} vor, dieses Mal lautet das Minimalpolynom aber $\mu(t) = (t-2)^2$. Es gibt also keinen Block der Größe 3 und die Jordan-Normalform ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg bei der Klausur am 01. August! Denken Sie an die Feriensprechstunden, die im EVS auf der Veranstaltungsseite unter *Klausurvorbereitung* aufgeführt sind.