Lineare Algebra II
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
13. / 14. Juli 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Probeklausur)
Sprechen Sie über die Probeklausur von letzter Woche. Klären Sie alle Fragen, die daraus verblieben sind, mit Ihrem Übungsleiter.

Aufgabe G2 (Minitest)

(a) ☐ Es gibt Matrizen, die sowohl positiv definit als auch negativ definit sind.

☐ Jede Matrix über $\mathbb{C}$ besitzt eine Jordan-Normalform.

☐ Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts gibt die Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert an.

☐ Jordanblöcke der Größe n sind nur diagonalisierbar, wenn $n = 1$.

☐ Die Jordan-Normalform einer reellen symmetrischen Matrix ist eine Diagonalmatrix.

☐ Eine Matrix und ihre Jordan-Normalform haben die gleiche Determinante und die gleiche Spur.

(b) Welche der folgenden Matrizen liegen in Jordan-Normalform vor?

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G3 (Jordan-Normalform durch Rangberechnung)
In dieser Aufgabe sehen Sie, wie man die Jordan-Normalform einer Matrix nur durch die Berechnung von Dimensionen der Kerne (oder alternativ: der Ränge) von Matrixpotenzen bestimmen kann.

(a) Wir betrachten eine 12×12-Matrix A mit folgender Jordan-Normalform:

$$J = \left(\begin{array}{c|cc|cc|ccc|cccc}
\lambda & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & \lambda & 1 & & & & & & & & & \\
 & & \lambda & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & & & \lambda & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & \lambda & 1 & & & & & \\
 & & & & & & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & & & & & \lambda & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \lambda & 1 & \\
 & & & & & & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right).$$

i. Bestimmen Sie $a_k := \dim\ker(A-\lambda E_{12})^k$ für $k = 1,2,3,4$.

ii. Wie können Sie aus a_1 und a_2 die Anzahl der Jordanblöcke der Größe 1 ablesen?

iii. Bestimmen Sie die Anzahl der Jordanblöcke der Größen 3 und 4 durch Betrachtung der anderen beiden Dimensionen.

iv. Geben Sie eine Formel an, welche die Anzahl der Jordanblöcke der Größe $m \in \mathbb{N}$ nur aus den Zahlen a_{m-1}, a_m und a_{m+1} berechnet (für eine beliebige Matrix A).

(b) Gegeben seien 10×10-Matrizen A, B, C, die nur den Eigenwert 42 besitzen. Diese erfüllen außerdem

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$\dim\ker(A-42E_{10})^k$	4	7	9	10
$\dim\ker(B-42E_{10})^k$	4	8	10	10
$\dim\ker(C-42E_{10})^k$	3	6	8	10

Geben Sie jeweils eine Jordan-Normalform an.

Aufgabe G4 (Kurze Beweise)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Matrix ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Hauptminoren eine nichtnegative Determinante haben.

(b) Jordanblöcke sind genau dann nilpotent, wenn sie zum Eigenwert 0 gehören.

(c) Es gibt Matrizen über $\mathbb{R}$, welche keine Jordan-Normalform über $\mathbb{R}$ besitzen.

Aufgabe G5 (Jordan-Normalform)

(a) Zeigen Sie: in der Jordan-Normalform von A kommt genau dann ein Jordanblock der Größe mindestens k zum Eigenwert λ vor, wenn das Minimalpolynom von A von $(t-\lambda)^k$ geteilt wird.

(b) Berechnen Sie jeweils eine Jordan-Normalform der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} -18 & 7 & -4 \\ -34 & 13 & -8 \\ 45 & -18 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 13 & 10 & 6 & -7 \\ -14 & -10 & -6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} \qquad A_8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_9 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} := \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_{11} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{12} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{14} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{15} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist nicht geplant, dass Sie alle diese Matrizen in der Übung untersuchen. Sie können sie als Vorbereitung auf die Klausur transformieren, wenn Sie die Berechnung von Jordan-Normalformen üben möchten. Die Lösungen werden rechtzeitig vor der Klausur hochgeladen, damit Sie ihre Ergebnisse vergleichen und in den Sprechstunden nachfragen können, wenn Sie noch Schwierigkeiten haben.

Viel Erfolg bei der Klausur am 01. August! Denken Sie an die Feriensprechstunden, die im EVS auf der Veranstaltungsseite unter *Klausurvorbereitung* aufgeführt sind.