Lineare Algebra II
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
29. / 30. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest (Bearbeitung innerhalb von 15 Minuten und ohne Benutzung des Skripts!))

- ☒ Jede Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Raum besitzt eine Strukturmatrix.
- ☒ Die Strukturmatrix einer Bilinearform bezüglich einer Basis ist eindeutig bestimmt.
- ☒ Die Strukturmatrix einer Bilinearform bestimmt diese eindeutig.
- ☒ Zu jeder quadratischen Form Q gibt es eine Bilinearform F mit

$$Q(x+y) = (F(x,y) + Q(x)) + (F(x,y) + Q(y))$$

- ☒ Das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ ist keine Bilinearform, das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ dagegen schon.
- ☒ Die Strukturmatrix des euklidischen Standardskalarprodukts bezüglich der Standardbasis ist die Einheitsmatrix.
- ☒ Es gibt quadratische Formen Q mit $Q(x) < 0$ für alle $x \neq 0$.
- ☒ Die Nullabbildung $(v,w) \mapsto 0$ ist eine Bilinearform.
- ☒ Die Nullabbildung $x \mapsto 0$ ist eine quadratische Form.
- ☒ Sind F und G linear, dann ist durch $\phi(x,y) := F(x)G(y)$ eine Bilinearform gegeben.
- ☐ Bilinearformen sind symmetrisch.

Aufgabe G2 (Beispiele für Bilinearformen)

(a) Sei V endlichdimensional und $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Zeigen oder widerlegen Sie: es ist ϕ genau dann symmetrisch, wenn es eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V gibt, so dass $\phi(v_i, v_j) = \phi(v_j, v_i)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

(b) Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

eine symmetrische Bilinearform ist und bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(c) Sei V der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Betrachten Sie die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(A,B) := \mathrm{tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass ϕ eine symmetrische Bilinearform ist und bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(d) Welche der in dieser Aufgabe untersuchten Bilinearformen sind Skalarprodukte?

Lösung:

(a) Aus der Symmetrie auf V folgt trivialerweise die Symmetrie auf jeder Basis von V. Für die andere Implikation sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis, auf der ϕ symmetrisch ist, und seien $x, y \in V$. Dann gilt $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ und $y = \sum_{i=1}^n \eta_i v_i$ mit $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{K}$ für alle $1 \le i \le n$. Wir folgern

$$\phi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j \phi(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j \phi(v_j, v_i) = \phi(y, x).$$

(b) Symmetrie und Bilinearität sind klar. Wir wählen als Basis $\mathcal{B} := (1, x, x^2)$. Durch die Berechnung diverser Integrale erhält man

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\phi(A,B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \phi(B,A)$$
$$\phi(A+\beta B, C) = \operatorname{tr}((A+\beta B)C) = \operatorname{tr}(AC + \beta BC) = \operatorname{tr}(AC) + \operatorname{tr}(\beta BC) = \operatorname{tr}(AC) + \beta \operatorname{tr}(BC) = \phi(A,C) + \beta\phi(B,C)$$

Wir wählen als Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und berechnen die 10 auftretenden Matrixprodukte. Als Strukturmatrix erhalten wir

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Bilinearform aus (b) ist offensichtlich positiv definit, denn aus $f \neq 0$ folgt $f^2 \neq 0$ und damit auch $\phi(f,f) > 0$. Die Strukturmatrix von (c) ist orthogonal und damit diagonalisierbar. Die Determinante ist aber offensichtlich -1, so dass nicht alle Eigenwerte positiv sein können. Eigenvektoren v zum Eigenwert -1 erfüllen dann

$$\phi(v,v) = v^T(-v) = -v^T v = -\|v\|^2 < 0,$$

so dass diese Bilinearform nicht positiv definit sein kann.

Aufgabe G3 (Quadratische Formen)
Wir betrachten den reellen Vektorraum V der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ erfüllt, aber keine quadratische Form ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\det : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

(c) Bestimmen Sie die Strukturmatrix der mit det assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(d) Transformieren Sie die Strukturmatrix von det in eine Basis, bezüglich der sie Diagonalgestalt hat.

Lösung:

(a) Setzen wir etwa

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^4 + x_2^4},$$

dann gilt $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x,y)$. Offensichtlich ist aber die Abbildung

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1+y_1)^4 + (x_2+y_2)^4} - \sqrt{x_1^4 + x_2^4} - \sqrt{y_1^4 + y_2^4} \right)$$

nicht bilinear, also f keine quadratische Form.

(b) Wegen der Multilinearitätseigenschaft der Determinante ist $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det A$. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F(A,B) &:= \frac{1}{2}(\det(A+B) - \det A - \det B) \\ &= \frac{1}{2}(ad + ah + de + eh - bc - cf - bg - fg - (ad - bc) - (eh - gf)) \\ &= \frac{1}{2}(ah + de - (cf + bg)) \end{aligned}$$

offensichtlich bilinear (rechnen Sie es nach, wenn es Ihnen nicht klar ist!). Daraus folgt, dass det eine quadratische Form ist.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} &F(B_1,B_1) = 0, && F(B_1,B_2) = F(B_2,B_1) = \frac{1}{2}, && F(B_1,B_3) = F(B_3,B_1) = 0, \\ &F(B_2,B_2) = 0, && F(B_2,B_3) = F(B_3,B_2) = 0, && F(B_3,B_3) = -1. \end{aligned}$$

Die Strukturmatrix lautet daher

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Eigenwerte lauten -1, $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Die zugehörigen Eigenräume werden aufgespannt durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die gewünschte Diagonalgestalt lautet daher

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4 (Hauptsatz über reelle orthogonale Matrizen)
Sei

$$A := \frac{1}{a}\begin{pmatrix} b & 0 & 4 \\ c & 5 & 0 \\ -d & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

mit $a > 0$ und $b, c, d \geq 0$.

(a) Wählen Sie die Parameter a, b, c, d so, dass A eine orthogonale Matrix wird.

(b) Ist A über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(c) Finden Sie eine orthogonale Matrix Q, so dass

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, 2\pi)$ und $\lambda \in \{-1, 1\}$ gilt.

Lösung:

(a) Da die Spalten Einheitslänge haben müssen, folgt $a = 5$. Da sie aufeinander senkrecht stehen müssen, folgt $c = 0$. Für die anderen Variablen folgt $b^2 + d^2 = 25$ und $4b = 3d$. Wir setzen $b = \frac{3}{4}d$ ein und erhalten $\frac{25}{16}d^2 = 1$. Aus $d \geq 0$ folgt damit $d = \frac{4}{5}$ und somit $b = \frac{3}{5}$.
Die Matrix lautet daher

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen die komplexen Eigenwerte und ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von A. Wir erhalten dafür

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum EW } \frac{3+4i}{5}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum EW } \frac{3-4i}{5}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zum EW } 1.$$

Insbesondere sehen wir, dass A nur über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

(c) Wir setzen

$$w_1 := \frac{-i}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 := v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$Q := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir also $t := \arccos\frac{3}{5}$, dann folgt offensichtlich $\cos t = \frac{3}{5}$. Andererseits folgt auch

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \implies \sin t \in \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Es erfüllt also t die geforderte Bedingung. Für λ können wir offensichtlich 1 wählen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ausgeartete Bilinearformen)

(a) Die Bilinearform $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x, y) \mapsto x^T A y$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum $\{0\} \neq U \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass für jedes $x \in U$ die Abbildung

$$f_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f_x(y) := F(x, y)$$

identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ erfüllt[1]?

(b) Sei jetzt $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^T B y$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum U wie in (a), d.h. so, dass $g_x(y) := G(x, y) \equiv 0$ für alle $x \in U$?

[1] Dann nennt man die Bilinearform ausgeartet.

(c) Sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x,x)$. Für welche Unterräume $\{0\} \neq U$ von $\mathbb{R}^2$ ist die auf U eingeschränkte Abbildung $Q|_U : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $Q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Lösung:

(a) Es ist

$$f_x(y) = 0 \iff \langle Ay, x\rangle = 0 \iff \left\langle y, A^T x\right\rangle = 0 \iff \langle y, Ax\rangle = 0$$

für alle $y \in \mathbb{R}^3$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $Ax = 0$ gilt, wenn also x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert Null ist. Offensichtlich ist $\det A = 0$, denn die Summe der ersten beiden Spalten ergibt die dritte Spalte. Der gesuchte Raum U ist also einfach der Eigenraum von A zum Eigenwert 0 und wird zum Beispiel von $(1,1,-1)^T$ erzeugt.

(b) Die G entsprechende Matrix B ist invertierbar, die Bilinearform also nicht entartet. Es gibt keinen Unterraum mit der Eigenschaft aus (a).

(c) Zunächst tranformieren wir B auf Diagonalgestalt. Die Eigenwerte von B sind -3 und 2, die entsprechenden Eigenvektoren lauten

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der Bilinearform in der Eigenvektorbasis ist daher

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$Q(x,x) = 0 \iff x \in U_\pm := \operatorname{span}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\right]_{(v_1,v_2)}.$$

Führen wir jetzt noch einen Basiswechsel in die Standardbasis durch, erhalten wir

$$U_+ = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1+2\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

für die positive Wurzel und

$$U_- = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -2-\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1-2\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

für die negative Wurzel. Dies sind die beiden in der Aufgabe gesuchten Möglichkeiten.

Aufgabe H2 (Affine Normalform von Quadriken, Teil I)
Wir betrachten Gleichungen der Form

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0, \tag{Quad}$$

wobei $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \leq i,j \leq n$ gelte. Die Lösungsmenge bezeichnen wir als *Quadrik*. Wir nehmen an, dass nicht alle Koeffizienten verschwinden. Beachten Sie, dass sich diese Definition von quadratischen Hyperflächen unterscheiden, wie sie in der Vorlesung definiert wurden.

(a) Schreiben Sie die Gleichung $Q(x) = 0$ für einen Vektor $x = (x_1,\dots,x_n)^T$ ohne Summenzeichen, indem Sie Matrizen und Vektoren benutzen.

(b) Überlegen Sie sich, dass die Lösungsmenge für $b = (b_1,\dots,b_n) = 0$ und $c = -1$ eine quadratische Hyperfläche beschreibt, wie sie in der Vorlesung eingeführt wurde.

(c) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation. Zeigen Sie, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Q(\phi(x)) = 0\}$$

wieder eine Quadrik ist.

(d) Wir betrachten die folgende Quadrik:

$$\mathcal{Q} := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = -1\right\}$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen von $\mathcal{Q}$ und führen Sie eine Hauptachsentransformation durch. Geben Sie die Transformationsmatrix Q an. Um welches geometrische Objekt handelt es sich bei $\mathcal{Q}$?

Lösung:

(a) Wir definieren $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix}$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ sowie $x = (x_1, \dots, x_n)$. Dann gilt

$$Q(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff Q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0.$$

(b) In diesem Fall ist

$$Q(x) = 0 \iff x^T A x = 1,$$

was der Definition der Vorlesung entspricht.

(c) Da ϕ affin ist, gibt es eine Matrix M und einen Vektor t mit $\phi(x) = Mx + t$. Dann folgt

$$\begin{aligned} Q(\phi(x)) &= (Mx+t)^T A(Mx+t) + b^T(Mx+t) + c \\ &= x^T(M^TAM)x + x^TM^TAt + (b^TM + t^TAM)x + b^Tt + t^TAt + c \\ &= x^T(M^TAM)x + (2t^TAM + b^TM)x + b^Tt + t^TAt + c \\ &= x^T(M^TAM)x + (M^T(2At+b))^Tx + b^Tt + t^TAt + c. \end{aligned}$$

Setzen wir also $\tilde{A} := M^TAM$, $\tilde{b} := M^T(2At+b)$ und $\tilde{c} := b^Tt + t^TAt + c$, dann gilt

$$Q(\phi(x)) = x^T\tilde{A}x + \tilde{b}^Tx + \tilde{c},$$

so dass wir wieder eine Quadrik erhalten.

(d) In Matrixform ist $\mathcal{Q}$ durch die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} x = -1$$

gegeben. Wir führen eine Hauptachsentransformation durch. Die Eigenwerte von A sind -1 und 2. Ein Hauptachsensystem erhalten wir, indem wir ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren bestimmen. Als Eigenvektoren berechnen wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zum EW } -1, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum EW } 2.$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert und ein Hauptachsensystem:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformieren wir A nun mit der Matrix

$$Q := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Quadrik lautet also

$$-x^2 - y^2 + 2z^2 = -1 \iff x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$$

für alle $xb_1, yb_2, zb_3 \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere sehen wir, dass es sich bei $\mathcal{Q}$ um ein einschaliges Hyperboloid handelt.

Aufgabe H3 (Affine Normalform von Quadriken, Teil II)
Wir betrachten wieder Quadriken, also Gleichungen der Form (Quad). Wir spezialisieren uns in dieser Aufgabe auf Dimension $n = 2$ und klassifizieren alle möglichen Lösungen.

(a) Benutzen Sie die Hauptachsentransformation, um (Quad) in eine äquivalente Gleichung der Form
$$Q'(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + f = 0$$
zu transformieren.

(b) Führen Sie einen weiteren Koordinatenwechsel durch, um eine äquivalente Gleichung zu erhalten, die einem der folgenden Typen entspricht:
$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + r = 0 \tag{Typ I}$$
$$\lambda_1 z_1^2 + \mu_2 z_2 = 0 \tag{Typ II}$$
$$\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 = 0 \tag{Typ III}$$
Dabei ist $\lambda_1 \neq 0$ und $\mu_2 \neq 0$.

(c) Betrachten Sie nun die Lösungsmengen dieser Gleichungen. Welche geometrischen Objekte treten auf?
Tipp: Unterscheiden Sie nach den Vorzeichen der Koeffizienten. Es gibt insgesamt 10 Fälle zu betrachten, davon entfallen 8 auf Typ I.

Lösung:

(a) Die Hauptachsentransformation besagt, dass es eine orthogonale Matrix Q gibt, so dass
$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
gilt. Wir setzen $y := Q^T x$ und erhalten damit
$$Q(x_1, x_2) = 0 \iff y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y + (Q^T b)^T y + c = 0,$$
was eine Gleichung der geforderten Form ist.

(b) Nehmen wir zunächst an, beide Eigenwerte seien von Null verschieden. Wir führen eine quadratische Ergänzung durch:
$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + f = 0 &\iff \lambda_1 \left(y_1^2 + \frac{\alpha}{\lambda_1} y_1 \right) + \lambda_2 \left(y_2^2 + \frac{\beta}{\lambda_2} \right) + f = 0 \\ &\iff \lambda_1 \left(y_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{\beta}{2\lambda_2} \right)^2 + \underbrace{f - \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^2}{\lambda_1^2} + \frac{\beta^2}{\lambda_2^2} \right)}_{=:r} = 0. \end{aligned}$$
Zuletzt führen wir die affine Transformation
$$z_1 = y_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2 + \frac{\beta}{2\lambda_2}$$
durch und erhalten eine Gleichung vom Typ I.
Verschwindet einer der beiden Eigenwerte, sagen wir $\lambda_2 = 0$, führen wir die quadratische Ergänzung nur mit y_1 durch und erhalten eine Gleichung der Form
$$\lambda_1 y_1^2 + \beta y_2 + f = 0.$$
Ist nun $\beta = 0$, sind wir wieder bei einer Gleichung vom Typ I. Ansonsten setzen wir nun $z_1 = y_1$ und $z_2 = y_2 + \frac{f}{\beta}$ (wieder eine affine Transformation!) und erhalten
$$\lambda_1 z_1^2 + \beta z_2 = 0,$$
also eine Gleichung vom Typ II.
Der letzte Fall ist, dass beide Eigenwerte verschwinden. Wir sind also bei einer Gleichung der Form
$$\alpha y_1 + \beta y_2 + f = 0.$$
Da nicht alle Koeffizienten verschwinden, gilt $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$. Wir nehmen ohne Einschränkung $\beta \neq 0$ an, transformieren wie oben durch $z_1 = y_1$ und $z_2 = y_2 + \frac{f}{\beta}$ und erhalten
$$\alpha z_1 + \beta z_2 = 0,$$
also eine Gleichung vom Typ III.

(c) Typ I: Die acht auftretenden Fälle sind wie folgt:

$\operatorname{sgn}\lambda_1$	$\operatorname{sgn}\lambda_2$	$\operatorname{sgn} r$	Gleichung	Lösungsmenge
$+1$	$+1$	$+1$	$a^2z_1^2 + b^2z_2^2 = -1$	leere Menge
$+1$	$+1$	-1	$a^2z_1^2 + b^2z_2^2 = 1$	Ellipse
$+1$	$+1$	0	$a^2z_1^2 + b^2z_2^2 = 0$	ein Punkt
$+1$	-1	-1	$a^2z_1^2 - b^2z_2^2 = 1$	Hyperbel
$+1$	-1	0	$a^2z_1^2 = b^2z_2^2$	zwei sich schneidende Geraden
$+1$	0	1	$a^2z_1^2 = -1$	leere Menge
$+1$	0	-1	$a^2z_1^2 = 1$	zwei parallele Geraden
$+1$	0	0	$a^2z_1^2 = 0$	eine Gerade

Typ II: Da $\mu_2 \neq 0$ und $\lambda_1 \neq 0$ gilt, erhalten wir als Lösungsmenge eine Parabel.

Typ III: Wir stellen um und erhalten $z_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2}z_1$, also eine Gerade.