Lineare Algebra II
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
29. / 30. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest (Bearbeitung innerhalb von 15 Minuten und ohne Benutzung des Skripts!))

- ☐ Jede Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Raum besitzt eine Strukturmatrix.
- ☐ Die Strukturmatrix einer Bilinearform bezüglich einer Basis ist eindeutig bestimmt.
- ☐ Die Strukturmatrix einer Bilinearform bestimmt diese eindeutig.
- ☐ Zu jeder quadratischen Form Q gibt es eine Bilinearform F mit

$$Q(x+y) = (F(x,y) + Q(x)) + (F(x,y) + Q(y))$$

- ☐ Das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ ist keine Bilinearform, das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ dagegen schon.
- ☐ Die Strukturmatrix des euklidischen Standardskalarprodukts bezüglich der Standardbasis ist die Einheitsmatrix.
- ☐ Es gibt quadratische Formen Q mit $Q(x) < 0$ für alle $x \neq 0$.
- ☐ Die Nullabbildung $(v,w) \mapsto 0$ ist eine Bilinearform.
- ☐ Die Nullabbildung $x \mapsto 0$ ist eine quadratische Form.
- ☐ Sind F und G linear, dann ist durch $\phi(x,y) := F(x)G(y)$ eine Bilinearform gegeben.
- ☐ Bilinearformen sind symmetrisch.

Aufgabe G2 (Beispiele für Bilinearformen)

(a) Sei V endlichdimensional und $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Zeigen oder widerlegen Sie: es ist ϕ genau dann symmetrisch, wenn es eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V gibt, so dass $\phi(v_i, v_j) = \phi(v_j, v_i)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

(b) Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

eine symmetrische Bilinearform ist und bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(c) Sei V der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Betrachten Sie die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(A,B) := \mathrm{tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass ϕ eine symmetrische Bilinearform ist und bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(d) Welche der in dieser Aufgabe untersuchten Bilinearformen sind Skalarprodukte?

Aufgabe G3 (Quadratische Formen)

Wir betrachten den reellen Vektorraum V der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ erfüllt, aber keine quadratische Form ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\det: V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

(c) Bestimmen Sie die Strukturmatrix der mit det assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(d) Transformieren Sie die Strukturmatrix von det in eine Basis, bezüglich der sie Diagonalgestalt hat.

Aufgabe G4 (Hauptsatz über reelle orthogonale Matrizen)
Sei

$$A := \frac{1}{a} \begin{pmatrix} b & 0 & 4 \\ c & 5 & 0 \\ -d & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

mit $a > 0$ und $b, c, d \geq 0$.

(a) Wählen Sie die Parameter a, b, c, d so, dass A eine orthogonale Matrix wird.

(b) Ist A über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(c) Finden Sie eine orthogonale Matrix Q, so dass

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, 2\pi)$ und $\lambda \in \{-1, 1\}$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ausgeartete Bilinearformen)

(a) Die Bilinearform $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x, y) \mapsto x^T A y$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum $\{0\} \neq U \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass für jedes $x \in U$ die Abbildung

$$f_x: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f_x(y) := F(x, y)$$

identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ erfüllt[1]?

(b) Sei jetzt $G: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^T B y$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum U wie in (a), d.h. so, dass $g_x(y) := G(x, y) \equiv 0$ für alle $x \in U$?

(c) Sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x, x)$. Für welche Unterräume $\{0\} \neq U$ von $\mathbb{R}^2$ ist die auf U eingeschränkte Abbildung $Q|_U : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $Q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Aufgabe H2 (Affine Normalform von Quadriken, Teil I)
Wir betrachten Gleichungen der Form

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0, \tag{Quad}$$

wobei $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gelte. Die Lösungsmenge bezeichnen wir als *Quadrik*. Wir nehmen an, dass nicht alle Koeffizienten verschwinden. Beachten Sie, dass sich diese Definition von quadratischen Hyperflächen unterscheiden, wie sie in der Vorlesung definiert wurden.

[1] Dann nennt man die Bilinearform ausgeartet.

(a) Schreiben Sie die Gleichung $Q(x) = 0$ für einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ohne Summenzeichen, indem Sie Matrizen und Vektoren benutzen.

(b) Überlegen Sie sich, dass die Lösungsmenge für $b = (b_1, \dots, b_n) = 0$ und $c = -1$ eine quadratische Hyperfläche beschreibt, wie sie in der Vorlesung eingeführt wurde.

(c) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation. Zeigen Sie, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Q(\phi(x)) = 0\}$$

wieder eine Quadrik ist.

(d) Wir betrachten die folgende Quadrik:

$$\mathcal{Q} := \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = -1\right\}$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen von $\mathcal{Q}$ und führen Sie eine Hauptachsentransformation durch. Geben Sie die Transformationsmatrix Q an. Um welches geometrische Objekt handelt es sich bei $\mathcal{Q}$?

Aufgabe H3 (Affine Normalform von Quadriken, Teil II)
Wir betrachten wieder Quadriken, also Gleichungen der Form (Quad). Wir spezialisieren uns in dieser Aufgabe auf Dimension $n = 2$ und klassifizieren alle möglichen Lösungen.

(a) Benutzen Sie die Hauptachsentransformation, um (Quad) in eine äquivalente Gleichung der Form

$$Q'(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + f = 0$$

zu transformieren.

(b) Führen Sie einen weiteren Koordinatenwechsel durch, um eine äquivalente Gleichung zu erhalten, die einem der folgenden Typen entspricht:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + r = 0 \tag{Typ I}$$
$$\lambda_1 z_1^2 + \mu_2 z_2 = 0 \tag{Typ II}$$
$$\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 = 0 \tag{Typ III}$$

Dabei ist $\lambda_1 \neq 0$ und $\mu_2 \neq 0$.

(c) Betrachten Sie nun die Lösungsmengen dieser Gleichungen. Welche geometrischen Objekte treten auf?
Tipp: Unterscheiden Sie nach den Vorzeichen der Koeffizienten. Es gibt insgesamt 10 Fälle zu betrachten, davon entfallen 8 auf Typ I.