Lineare Algebra II
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
22. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest (Bearbeitung innerhalb von 15 Minuten und ohne Benutzung des Skripts!))

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Symmetrische Matrizen sind normal.
- ☒ Reelle symmetrische Matrizen sind normal.
- ☒ Selbstadjungierte Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☒ Orthogonale Matrizen sind unitär.
- ☐ Unitäre Matrizen sind orthogonal.
- ☐ Das Produkt symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- ☒ Hermitesche Matrizen sind selbstadjungiert.
- ☒ Selbstadjungierte Matrizen sind hermitesch.
- ☒ Es gibt Matrizen, die hermitesch und schiefhermitesch sind.
- ☐ Es gibt normale Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind.

(b) Sei V ein Vektorraum und U ein Unterraum. Geben Sie die Definition des Faktorraums ${}^{V}\!/_{U}$ an.

(c) Geben Sie die Definitionen von $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ an.

Aufgabe G2 (Zum Aufwärmen: Typen von Matrizen)

Entscheiden Sie bei den folgenden Matrizen, ob sie symmetrisch, schiefsymmetrisch, unitär, orthogonal, hermitesch, selbstadjungiert, schiefhermitesch, normal oder diagonalisierbar sind!

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_5 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_6 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad M_7 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad M_8 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eigenschaft	**Matrizen**
symmetrisch	M_1, M_2, M_6, M_8
schiefsymmetrisch	M_2, M_5
unitär	M_1, M_4, M_5, M_6, M_8
orthogonal	M_1, M_4, M_5
hermitesch = selbstadjungiert	M_1, M_2, M_7
schiefhermitesch	M_2, M_5, M_8
normal	M_1, M_2, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8
diagonalisierbar	M_1, M_2, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8

Die ersten sechs Eigenschaften lesen wir direkt aus den Matrizen ab. Da unitäre und hermitesche Matrizen normal sind, wissen wir bei allen Matrizen außer M_3, dass sie normal sind. Die Matrix M_3 kann nicht normal sein, denn sie ist bekannterweise nicht diagonalisierbar. Alle normalen Matrizen sind aber diagonalisierbar, so dass auch in dieser Zeile alle Matrizen außer M_3 stehen müssen.

Aufgabe G3 (Halbnormen und Wiederholung LA 1)
Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *Halbnorm* ist eine positive, absolut homogene Abbildung $p: V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$, welche die Dreiecksungleichung erfüllt. Im Gegensatz zu einer Norm sind Vektoren $0 \neq x \in V$ mit $p(x) = 0$ erlaubt.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\varphi \in V^*$ die Abbildung $x \mapsto |\varphi(x)|$ eine Halbnorm ist. Dabei bezeichnet

$$V^* := \{\varphi : V \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ linear}\}$$

den Dualraum von V.

(b) Sei p eine Halbnorm. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U_p := \{x \in V \ : \ p(x) = 0\}$$

einen Untervektorraum von V bildet.

(c) Sei p eine Halbnorm. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\|\cdot\| : {}^{V}\!/_{U_p} \to \mathbb{R}, \quad [x] \mapsto \|[x]\| := p(x)$$

eine wohldefinierte Norm ist.

Lösung:

(a) Positivität: Trivial, denn der Betrag ist positiv.
Homogenität: $|\varphi(\lambda x)| = |\lambda\varphi(x)| = |\lambda| \cdot |\varphi(x)|$.
Dreiecksungleichung: $|\varphi(x+y)| = |\varphi(x)+\varphi(y)| \leq |\varphi(x)| + |\varphi(y)|$. Dabei haben wir die Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion benutzt.

(b) Sei $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist $p(0) = p(0x) = 0p(x) = 0$, also ist $0 \in U_p$.
Seien $v_1, v_2 \in U_p$. Dann ist $p(v_1) = p(v_2) = 0$, also auch $p(\lambda v_1) = |\lambda| p(v_1) = 0$, woraus wir $\lambda v_1 \in U_p$ folgern. Zudem ist

$$0 \leq p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2) = 0,$$

also auch $p(v_1 + v_2) = 0$ und damit $v_1 + v_2 \in U_p$.

(c) Wohldefiniertheit: Sei $y \in [x]$. Dann existiert ein $n \in U_p$ mit $p(n) = 0$ und $y = x + n$. Wir folgern einerseits

$$p(y) = p(x+n) \leq p(x) + p(n) = p(x) \quad \text{und andererseits} \quad p(x) = p(y-n) \leq p(y) + p(n) = p(y).$$

Daraus folgt $p(y) = p(x)$, also ist $\|[y]\| = \|[x]\|$.
Positive Definitheit: Es gilt

$$\|[x]\| = 0 \iff p(x) = 0 \iff x \in U_p \iff [x] = [0].$$

Homogenität: Es gilt

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = |\lambda| \cdot \|[x]\|.$$

Dreiecksungleichung: Es gilt

$$\|[x] + [y]\| = \|[x+y]\| = p(x+y) \leq p(x) + p(y) = \|[x]\| + \|[y]\|.$$

Aufgabe G4 (Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen)

(a) Zeigen Sie direkt, dass reelle symmetrische Matrizen eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
   i. Zeigen Sie, dass jede reelle symmetrische Matrix A einen reellen Eigenwert besitzt.
   ii. Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein unter A invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein A-invarianter Unterraum.

iii. Zeigen Sie induktiv, dass es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A in $\mathbb{R}^n$ gibt und folgern Sie den Hauptsatz.

(b) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix S, sodass $S^{-1}AS = D$ gilt. Geben Sie alle Matrizen konkret an.

Lösung:

(a) i. Das charakteristische Polynom von A besitzt nach dem Hauptsatz der Algebra eine komplexe Nullstelle. Andererseits sind alle Eigenwerte von A reell, denn es gilt (bezüglich des unitären Standardskalarprodukts)

$$Av = \lambda v \implies \lambda \langle v, v \rangle = \langle Av, v \rangle \overset{\overline{A^T}=A}{=} \langle v, Av \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle \overset{\langle v,v\rangle > 0}{\implies} \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Der Eigenwert, der nach dem Hauptsatz der Algebra existiert, ist also ebenfalls reell.

ii. Sei $v \in U^\perp$, also $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in U$. Dann folgt $\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle$, da A symmetrisch und reell ist. Da U aber A-invariant ist, gilt $Au \in U$ und wegen $v \in U^\perp$ verschwindet also das Skalarprodukt. Es ist daher $Av \in U^\perp$. Insgesamt folgern wir also $AU^\perp \subseteq U^\perp$, was zu zeigen war.

iii. Induktionsanfang: Nach Schritt 1 hat A einen reellen Eigenwert λ. Sei V_λ der zugehörige Eigenraum. Ist $V_\lambda^\perp = \{0\}$, sind wir fertig, denn dann ist $V_\lambda = \mathbb{R}^n$ und $A = \lambda\,\mathrm{id}$.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, wir hätten ein Orthonormalsystem $(v_1, \ldots, v_k)$ aus Eigenvektoren von A, wobei $1 \le k < n$.

Induktionsschritt: Der Raum $\{v_1, \ldots, v_k\}^\perp$ ist nach Schritt 2 invariant unter A. Im Fall $k = n$ sind wir fertig, ansonsten betrachten wir die Abbildung $A' := A|_{\{v_1,\ldots,v_k\}^\perp}$, welche aus A durch Einschränkung auf $\{v_1, \ldots, v_k\}^\perp$ entsteht. Diese ist natürlich immernoch reell. Sie ist auch symmetrisch, denn sie geht durch einen Basiswechsel aus A hervor, und ein Basiswechsel mit orthogonalen Matrizen erhält Symmetrie:

$$A = S^{-1}BS \iff A^T = S^T B^T (S^{-1})^T = S^{-1}BS = A \iff S^{-1}B^T S = S^{-1}BS \iff B = B^T.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $S^{-1} = S^T$ wegen der Orthogonalität von S gilt. Wir wenden wiederum Schritt 1 auf A' an und erhalten einen normierten Eigenvektor v_{k+1}.

Dieses Verfahren setzen wir fort, bis wir n normierte Eigenvektoren haben. In dieser Basis hat A Diagonalgestalt.

(b) Das charakteristische Polynom $p_A(t) = (t-1)^2(t-4)$ hat die Nullstellen 1 (mit Vielfachheit 2) und 4. Wir bestimmen jeweils linear unabhängige Eigenvektoren und normieren diese – beispielsweise erhalten wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ zum EW } 1, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ zum EW } 4.$$

Wir erhalten damit

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

In dieser Hausübung könnten Sie etwas Analysis benötigen. Hilfreich sind die folgenden Behauptungen, die Sie benutzen dürfen:

- Es gilt $\cos t = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \mp \ldots$

- Es gilt $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \mp \ldots$.
- Es gilt die *Cauchy-Produktformel*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

Aufgabe H1 (Matrixexponentialfunktion Teil I)
Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wir definieren die *Matrixexponentialfunktion* durch

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots.$$

Es lässt sich mit Mitteln der Analysis zeigen, dass diese Reihe für jede Matrix A absolut konvergiert, die Funktion

$$\exp\colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \qquad A \mapsto \exp(A)$$

also wohldefiniert ist. In dieser Aufgabe untersuchen wir einige Eigenschaften dieser Abbildung.

(a) Berechnen Sie $\exp(At)$ für $A \in \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ und $t \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie den Binomialsatz für Matrizen: Falls A und B kommutieren gilt die Formel

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

(c) Folgern Sie die Funktionalgleichung

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A+B),$$

falls A und B kommutieren.

(d) Folgern Sie $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Lösung:

(a) Offensichtlich ist $\exp 0 = E_2$. Außerdem ist

$$\exp(tE_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} & 0\\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\exp t & 0\\ 0 & \exp t\end{pmatrix}.$$

Für die dritte Matrix $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ berechnen wir $A^2 = -E_2$, daher $A^3 = -A$ und $A^4 = E_2$. Induktiv sieht man so schnell

$$A^k = \begin{cases} E_2 & \text{falls } k = 4n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0\\ A & \text{falls } k = 4n+1 \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0\\ -E_2 & \text{falls } k = 4n+2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0\\ -A & \text{falls } k = 4n+3 \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Wir berechnen daher für die Komponenten von $\exp(At)$:

$$(\exp(At))_{11} = (\exp(At))_{22} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \mp \ldots = \cos t$$
$$(\exp(At))_{21} = -(\exp(At))_{12} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \mp \ldots = \sin t$$

Insgesamt folgern wir

$$\exp\left(t \cdot \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

(b) Der Beweis erfolgt per Induktion. Im Induktionsschritt berechnen wir dafür

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right)(A+B) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right)A + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right)B \\
&\overset{AB=BA}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}A^kB^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n}A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}A^kB^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{b+1-k} + \binom{n}{0}A^0B^{n+1} \\
&= \binom{n}{0}A^0B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)A^kB^{n+1-k} + \binom{n}{n}A^{n+1}B^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

(c) Wir benutzen die Cauchy-Produktformel und erhalten

$$
\exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\cdot\frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} \overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!} = \exp(A+B)
$$

(d) A und $-A$ vertauschen. Setzen wir das in die Funktionalgleichung ein, erhalten wir

$$
E_n = \exp(0) = \exp(A)\exp(-A) = \exp(-A)\exp(A).
$$

Daraus folgt $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ (insbesondere ist $\exp A$ für jedes A invertierbar).

Aufgabe H2 (Matrixexponentialfunktion Teil II)

(a) Berechnen Sie $\exp A$ für eine Diagonalmatrix A.

(b) Wie kann man $\exp A$ für eine diagonalisierbare Matrix bestimmen?

(c) Berechnen Sie $\exp A$ für $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) Zeigen Sie $\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A$ für diagonalisierbare Matrizen A.

(e) Zeigen Sie: ist A schiefsymmetrisch, dann ist $\exp A$ orthogonal.

Lösung:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$
\exp A = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp\lambda_n \end{pmatrix}.
$$

(b) Sei A diagonalisierbar. Dann gibt es eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = S^{-1}DS$ gilt. Es folgt

$$
A^k = \underbrace{(S^{-1}DS)(S^{-1}DS)\cdots(S^{-1}DS)}_{k \text{ Faktoren}} = S^{-1}D(SS^{-1})D(SS^{-1})\cdots DS = S^{-1}D^kS.
$$

Wir folgern für die Expontentialabbildung

$$
\exp A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(S^{-1}D^kS) = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D^k\right)S = S^{-1}\exp(D)S.
$$

(c) Wir diagonalisieren die Matrix A. Das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)(1-\lambda)(9-\lambda)$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 9$. Wir berechnen jeweils einen normierten Eigenvektor (wir normieren, da uns das das spätere Invertieren von S vereinfacht). Wir erhalten

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix S können wir also durch Transponieren invertieren und wir erhalten

$$S^{-1}AS = D, \qquad \text{wobei} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Nach Aufgabenteil (a) und (b) bestimmen wir die Exponentialabbildung zu

$$\exp A = S \exp(D) S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e+e^9 & 0 & e-e^9 \\ 0 & 2e^{-1} & 0 \\ e-e^9 & 0 & e+e^9 \end{pmatrix}.$$

(d) Sei A diagonalisierbar. Dann gibt es eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = S^{-1}DS$ gilt. Bezeichnen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ die Einträge in D, erhalten wir daher mit (a) und (b)

$$\det \exp A = \det(S^{-1} \exp(D) S) = \det \exp D = \prod_{k=1}^{n} \exp(\lambda_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) = \exp \operatorname{tr} D = \exp \operatorname{tr} A.$$

Dabei haben wir verwendet, dass ähnliche Matrizen die gleiche Spur haben.

(e) A ist schiefsymmetrisch, also $A^T = -A$. Insbesondere vertauschen A und A^T. Wegen $(A^k)^T = (A^T)^k$ gilt auch $\exp(A)^T = \exp(A^T)$. Wir verwenden die Funktionalgleichung und erhalten

$$\exp(A)\exp(A)^T = \exp(A)\exp(A^T) = \exp(A + A^T) = \exp(A - A) = E_n,$$

was eine der möglichen Bedingungen für Orthogonalität ist.

Die Aussagen, in denen wir Diagonalisierbarkeit vorausgesetzt haben, gelten mit einer kleinen Anpassung auch für nicht diagonalisierbare Matrizen. Zeigen Sie diese Behauptung als Klausurvorbereitung, wenn Sie in der Vorlesung die *Jordan-Normalform* behandelt haben.

Aufgabe H3 (Adjungierter Operator)

(a) Seien $A, B : V \to V$ lineare Abbildungen zwischen unitären (nicht notwendigerweise endlichdimensionalen) Vektorräumen. Wir bezeichnen mit A^* die zu A adjungierte Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

i. $A^{**} = A$.
ii. Wenn A invertierbar ist, dann ist es auch A^*. In diesem Fall gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
iii. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
iv. Mit $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.
v. $(AB)^* = B^* A^*$.
vi. $\ker(A^*) = (\operatorname{im} A)^\perp$.

(b) Sei

$$S : \ell^2 \to \ell^2, \qquad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

der Rechtsshift. Bestimmen Sie S^* sowie die Eigenwerte beider Abbildungen.

Lösung: Wir werden oft benutzen, dass für zwei lineare Abbildungen A, B gilt

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle = \langle Bx, y \rangle \quad \forall x, y \in V &\implies \langle (A-B)x, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in V \\ &\implies \langle (A-B)x, (A-B)x \rangle = 0 \quad \forall x \in V \\ &\implies (A-B)x = 0 \quad \forall x \in V \\ &\implies A = B \end{aligned} \tag{$*$}$$

(a) i. Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle A^{**}x, y\rangle = \overline{\langle y, A^{**}x\rangle} = \overline{\langle A^{*}y, x\rangle} = \langle x, A^{*}y\rangle = \langle Ax, y\rangle\,.$$

Die Behauptung folgt mit $(*)$.

ii. Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\left\langle A^{*}(A^{-1})^{*}x, y\right\rangle = \overline{\langle Ay, (A^{-1})^{*}x\rangle} = \overline{\langle A^{-1}Ay, x\rangle} = \langle x, y\rangle\,.$$

Mit $(*)$ folgt $A^{*}(A^{-1})^{*} = \mathrm{id}$. Durch Vertauschen von A^{-1} und A folgt die Behauptung.

iii. Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle (A+B)^{*}x, y\rangle = \overline{\langle (A+B)y, x\rangle} = \overline{\langle Ay, x\rangle} + \overline{\langle By, x\rangle} = \langle A^{*}x, y\rangle + \langle B^{*}x, y\rangle = \langle (A^{*}+B^{*})x, y\rangle\,.$$

Die Behauptung folgt mit $(*)$.

iv. Für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle (\lambda A)^{*}x, y\rangle = \overline{\langle \lambda Ay, x\rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle Ay, x\rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle y, A^{*}x\rangle} = \overline{\lambda}\,\langle A^{*}x, y\rangle = \left\langle \overline{\lambda}A^{*}x, y\right\rangle.$$

Die Behauptung folgt mit $(*)$.

v. Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle (AB)^{*}x, y\rangle = \overline{\langle (AB)y, x\rangle} = \overline{\langle By, A^{*}x\rangle} = \overline{\langle y, B^{*}A^{*}x\rangle} = \langle B^{*}A^{*}x, y\rangle\,.$$

Die Behauptung folgt mit $(*)$.

vi. Es gilt

$$x \in \ker(A^{*}) \iff 0 = \langle A^{*}x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall y \in V \iff x \in (\operatorname{im} A)^{\perp}.$$

(b) Wir berechnen

$$\langle Sx, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_{i+1}}.$$

Setzen wir also $S^{*}\colon \ell^2 \to \ell^2$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, dann gilt

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^{*}y\rangle$$

für alle $x, y \in V$. Wir sehen also, dass S^{*} der Linksshift aus Aufgabe G3 von Übungsblatt 4 ist. Dort haben wir auch gezeigt, dass jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von S^{*} ist (wenn Sie sich nicht erinnern, zeigen Sie diese Aussage erneut!).
Für die Eigenwerte von S betrachten wir

$$S(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = \lambda(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \iff (0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Insbesondere folgt $\lambda x_1 = 0$. Ist $\lambda = 0$, dann folgt auch $x_1 = \lambda x_2 = 0$ und induktiv $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Nullvektor kann aber nie ein Eigenvektor sein, so dass wir $\lambda \neq 0$ schließen.
Andererseits folgt für $\lambda \neq 0$ bereits $x_1 = 0$. Daraus folgern wir $\frac{1}{\lambda}x_1 = x_2 = 0$ und induktiv $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wiederum finden wir keinen Eigenvektor.
Insgesamt sehen wir, dass S keine Eigenwerte oder Eigenvektoren hat.