Lineare Algebra II
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
22. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest (Bearbeitung innerhalb von 15 Minuten und ohne Benutzung des Skripts!))

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Symmetrische Matrizen sind normal.
- ☐ Reelle symmetrische Matrizen sind normal.
- ☐ Selbstadjungierte Matrizen sind diagonalisierbar.
- ☐ Orthogonale Matrizen sind unitär.
- ☐ Unitäre Matrizen sind orthogonal.
- ☐ Das Produkt symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- ☐ Hermitesche Matrizen sind selbstadjungiert.
- ☐ Selbstadjungierte Matrizen sind hermitesch.
- ☐ Es gibt Matrizen, die hermitesch und schiefhermitesch sind.
- ☐ Es gibt normale Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind.

(b) Sei V ein Vektorraum und U ein Unterraum. Geben Sie die Definition des Faktorraums V/U an.

(c) Geben Sie die Definitionen von $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ an.

Aufgabe G2 (Zum Aufwärmen: Typen von Matrizen)

Entscheiden Sie bei den folgenden Matrizen, ob sie symmetrisch, schiefsymmetrisch, unitär, orthogonal, hermitesch, selbstadjungiert, schiefhermitesch, normal oder diagonalisierbar sind!

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_4 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_5 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_6 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad M_7 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad M_8 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G3 (Halbnormen und Wiederholung LA 1)

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *Halbnorm* ist eine positive, absolut homogene Abbildung $p\colon V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$, welche die Dreiecksungleichung erfüllt. Im Gegensatz zu einer Norm sind Vektoren $0 \neq x \in V$ mit $p(x) = 0$ erlaubt.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\varphi \in V^*$ die Abbildung $x \mapsto |\varphi(x)|$ eine Halbnorm ist. Dabei bezeichnet

$$V^* := \{\varphi\colon V \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ linear}\}$$

den Dualraum von V.

(b) Sei p eine Halbnorm. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U_p := \{x \in V \ : \ p(x) = 0\}$$

einen Untervektorraum von V bildet.

(c) Sei p eine Halbnorm. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\|\cdot\| \colon {}^{V}\!/_{U_p} \to \mathbb{R}, \quad [x] \mapsto \|[x]\| := p(x)$$

eine wohldefinierte Norm ist.

Aufgabe G4 (Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen)

(a) Zeigen Sie direkt, dass reelle symmetrische Matrizen eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i. Zeigen Sie, dass jede reelle symmetrische Matrix A einen reellen Eigenwert besitzt.

ii. Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein unter A invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein A-invarianter Unterraum.

iii. Zeigen Sie induktiv, dass es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A in $\mathbb{R}^n$ gibt und folgern Sie den Hauptsatz.

(b) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix S, sodass $S^{-1}AS = D$ gilt. Geben Sie alle Matrizen konkret an.

Hausübung

In dieser Hausübung könnten Sie etwas Analysis benötigen. Hilfreich sind die folgenden Behauptungen, die Sie benutzen dürfen:

- Es gilt $\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \mp \ldots$.
- Es gilt $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \mp \ldots$.
- Es gilt die *Cauchy-Produktformel*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

Aufgabe H1 (Matrixexponentialfunktion Teil I)

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Wir definieren die *Matrixexponentialfunktion* durch

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots.$$

Es lässt sich mit Mitteln der Analysis zeigen, dass diese Reihe für jede Matrix A absolut konvergiert, die Funktion

$$\exp \colon M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \qquad A \mapsto \exp(A)$$

also wohldefiniert ist. In dieser Aufgabe untersuchen wir einige Eigenschaften dieser Abbildung.

(a) Berechnen Sie $\exp(At)$ für $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $t \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie den Binomialsatz für Matrizen: Falls A und B kommutieren gilt die Formel

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

(c) Folgern Sie die Funktionalgleichung

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A + B),$$

falls A und B kommutieren.

(d) Folgern Sie $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Aufgabe H2 (Matrixexponentialfunktion Teil II)

(a) Berechnen Sie $\exp A$ für eine Diagonalmatrix A.

(b) Wie kann man $\exp A$ für eine diagonalisierbare Matrix bestimmen?

(c) Berechnen Sie $\exp A$ für $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) Zeigen Sie $\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A$ für diagonalisierbare Matrizen A.

(e) Zeigen Sie: ist A schiefsymmetrisch, dann ist $\exp A$ orthogonal.

Die Aussagen, in denen wir Diagonalisierbarkeit vorausgesetzt haben, gelten mit einer kleinen Anpassung auch für nicht diagonalisierbare Matrizen. Zeigen Sie diese Behauptung als Klausurvorbereitung, wenn Sie in der Vorlesung die *Jordan-Normalform* behandelt haben.

Aufgabe H3 (Adjungierter Operator)

(a) Seien $A, B : V \to V$ lineare Abbildungen zwischen unitären (nicht notwendigerweise endlichdimensionalen) Vektorräumen. Wir bezeichnen mit A^* die zu A adjungierte Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

  i. $A^{**} = A$.
  ii. Wenn A invertierbar ist, dann ist es auch A^*. In diesem Fall gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
  iii. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
  iv. Mit $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.
  v. $(AB)^* = B^* A^*$.
  vi. $\ker(A^*) = (\operatorname{im} A)^\perp$.

(b) Sei

$$S : \ell^2 \to \ell^2, \qquad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

der Rechtsshift. Bestimmen Sie S^* sowie die Eigenwerte beider Abbildungen.