Lineare Algebra II
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
15./16. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest: ohne Benutzung des Skripts und innerhalb von 10 Minuten!)
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☒ Ein normierter Raum ist immer auch ein metrischer Raum.
- ☐ Ein metrischer Raum ist immer auch ein normierter Raum.
- ☒ Ein euklidischer Raum ist immer auch ein metrischer Raum.
- ☐ Ein normierter Raum ist immer auch ein euklidischer Raum.
- ☐ Isometrien sind immer invertierbar.
- ☒ Isometrien sind immer injektiv.
- ☐ Isometrien können 0 als Eigenwert haben.
- ☐ Orthogonale Projektionen sind Isometrien.
- ☒ Isometrien endlichdimensionaler Räume bilden Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab.
- ☒ Hintereinanderausführungen von Isometrien sind Isometrien.
- ☒ Längenerhaltende Abbildungen erhalten auch Winkel.
- ☐ Winkelerhaltende Abbildungen erhalten auch Längen.

Aufgabe G2 (Zum Aufwärmen: Isometrien und Orthonormalbasen)

(a) Bestimmen Sie alle abstandserhaltenden Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also alle Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Bedingung $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ erfüllen.
Tipp: Untersuchen Sie erst den Fall $\varphi(0) = 0$ und führen Sie dann $\varphi(0) \neq 0$ auf diesen Fall zurück.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Isometrien $\varphi\colon V \to V$ sind surjektiv.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit den Spalten $(b_1, \ldots, b_n)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   i. $A^T A = E_n$.
   ii. $(b_1, \ldots, b_n)$ bildet ein Orthonormalsystem bezüglich des Standardskalarprodukts.

Lösung:

(a) Ist $\varphi(0) = 0$, dann folgt $|\varphi(x)| = |x|$, also $\varphi = \pm\,\mathrm{id}$. Ansonsten setzen wir $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \varphi(0)$, folgern wieder $|\tilde{\varphi}(x)| = |\varphi(x) - \varphi(0)| = |x - 0| = |x|$ (denn es ist $\tilde{\varphi}(0) = 0$) und daher gilt $\varphi(x) = \pm x + \varphi(0)$.

(b) Diese Aussage ist falsch: im Raum $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist die lineare Abbildung

$$S\colon \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}), \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$$

ein Beispiel. Sie ist nicht surjektiv, denn es ist $(1, 0, 0, \ldots) \notin \operatorname{im} S$. Sie ist aber isometrisch, denn es gilt

$$\left\langle S(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, S(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = 0 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \overline{b_i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \overline{b_i} = \left\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle .$$

(c) An der Stelle (ij) der Matrix A^TA steht das Skalarprodukt der i-ten Spalte mit der j-ten Spalte von A. Es ist also $A^TA = E_n$ genau dann, wenn $\left\langle b_i, b_j \right\rangle = \delta_{ij}$ gilt, also genau dann, wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ ein Orthonormalsystem ist.

Aufgabe G3 (Isometrien sind linear, Teil I)

(a) Sei V ein euklidischer Raum. Zeigen Sie, dass es zu je zwei Punkten $x, y \in V$ einen eindeutig bestimmten Punkt $m(x,y)$ gibt, der

$$d(x, m(x,y)) = d(y, m(x,y)) = \frac{1}{2} d(x,y)$$

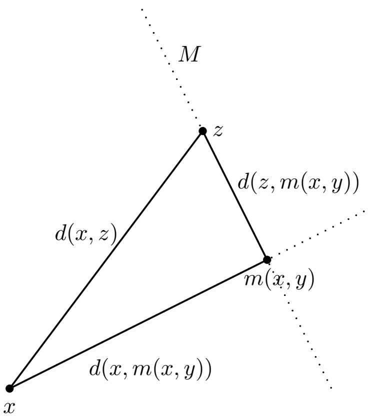
erfüllt. Dieser heißt *Mittelpunkt* von x und y.

Tipp: Skizzieren Sie sich die Menge $M := \{z \in V \ : \ d(x,z) = d(y,z)\}$ und benutzen Sie den Satz von Pythagoras.

(b) Sei W ein Vektorraum und sei $d\colon W \times W \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) := 1 - \delta_{xy}$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist und dass es in (W,d) keinen eindeutig bestimmten Mittelpunkt zwischen zwei Punkten $x \neq y$ gibt. Was ist mit $x = y$?

Erinnerung: Eine *Metrik* auf V ist eine positiv definite, symmetrische Abbildung $d\colon V \times V \to V$, welche die Dreiecksungleichung erfüllt. Schlagen Sie diese Begriffe nach, wenn Sie sie noch nicht können!

Lösung:



(a) Die Existenz eines solchen Punktes ist klar: wir setzen $m(x,y) := \frac{1}{2}(x+y)$. Dann gilt offenbar

$$d(x, m(x,y)) = \left\| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right\| = \frac{1}{2} d(x,y) = \left\| y - \frac{1}{2}(x+y) \right\| = d(y, m(x,y)).$$

Eindeutigkeit, Variante 1: Wir überlegen uns zunächst, dass

$$M \subseteq \{z \in V \ : \ \langle z - m(x,y), x - y \rangle = 0\}$$

gilt.

Sei $z \in M$. Dann gilt

$$\|x - z\|^2 = \|y - z\|^2 \iff \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2(\langle z, x \rangle - \langle z, y \rangle).$$

Daraus folgern wir

$$\langle z - m(x,y), x - y \rangle = \langle z, x \rangle - \langle z, y \rangle + \frac{1}{2} \langle y - x, y + x \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle y - x, y + x \rangle) = 0.$$

Laut dem Satz von Pythagoras ist dann

$$d(m(x,y), x)^2 = \frac{1}{4} d(x,y)^2 = d(x,z)^2 = d(z, m(x,y))^2 + d(m(x,y), x)^2.$$

Aus der Gleichung können wir also $d(z, m(x,y)) = 0$ folgern, wegen der Definitheit der Metrik d ist also $z = m(x,y)$. Das zeigt die Eindeutigkeit des Mittelpunkts.

Eindeutigkeit, Variante 2: Sei $z \in M$. Die Dreiecksungleichung besagt

$$\|x-z\| + \|z-y\| \geq \|x-y\|.$$

Nach Tutoriumsaufgabe T4 von Tutoriumsblatt 7 gilt hier genau dann Gleichheit, wenn $(x-z)$ und $(z-y)$ die Bedingung

$$(x-z) = \lambda(z-y) \tag{$*$}$$

mit einem $\lambda \geq 0$ erfüllen oder $z-y=0$ gilt. Der zweite Fall ist trivial, denn dann ist $z=y$ und damit wegen $(*)$ auch $z=x$. Ist $\lambda=0$, dann folgt $x=z$ und daher auch $y=z$. Ansonsten folgt aus $\|x-z\| = \|z-y\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$ wegen $(*)$ sogar $|\lambda| = \lambda = 1$. Damit erhalten wir

$$(x-z) = (z-y) \implies z = \frac{1}{2}(x+y) = m(x,y).$$

Der Mittelpunkt ist also eindeutig.

(b) Es ist klar, dass d eine Metrik ist (oder man rechnet es schnell nach: Symmetrie und Definitheit sind trivial und die Dreiecksungleichung zeigt man durch Fallunterscheidung).
Gilt $x \neq y$, dann folgt aus der Mittelpunktsbedingung

$$d(x,m(x,y)) = d(y,m(x,y)) = \frac{1}{2}d(x,y) = \frac{1}{2},$$

was aber von keinem $m(x,y)$ erfüllt werden kann (es ist $d(v,w) \in \{0,1\}$ für alle $v,w \in W$). Im Fall $x=y$ folgt $d(x,m(x,y))=0$, also $m(x,y)=x=y$. Es gibt also nur in diesem Trivialfall einen Mittelpunkt.

Aufgabe G4 (Der Satz vom Fußball)
Betrachten Sie ein Fußballspiel, das in zwei Halbzeiten von je 90 Minuten zwischen zwei Mannschaften ausgetragen wird. Auf dem Spielfeld gibt es einen Anstoßpunkt, auf den zu Beginn jeder der beiden Halbzeiten ein perfekt runder Fußball aufgelegt wird.
Zeigen Sie den *Satz vom Fußball*: Es gibt zwei Punkte auf dem Fußball, die zu Spielbeginn und zur Halbzeit genau an der gleichen Stelle liegen.
Tipp: Was hat das mit Eigenwerten von Abbildungen aus SO(3) zu tun?

Lösung: Vergleichen wir den Ball zu Spielbeginn und zur Halbzeit, dann sehen wir, dass auf ihn eine Abbildung $A \in \mathrm{SO}(3)$ angewendet wurde. Der Satz vom Fußball bedeutet also, dass A den Eigenwert 1 haben muss: dann gibt es einen Punkt v auf dem Fußball, so dass $Av = v$ und $A(-v) = -v$ gilt. Die Punkte v und $-v$ sind also zu Spielbeginn und zur Halbzeit an der gleichen Stelle.
Da das charakteristische Polynom von A Grad 3 hat, besitzt A auf jeden Fall einen reellen Eigenwert. Es ist nicht möglich, dass A genau zwei reelle Eigenwerte hat: ist $\lambda \notin \mathbb{R}$ ein Eigenwert, dann auch $\overline{\lambda} \notin \mathbb{R}$. Es gibt also zwei Fälle.

Fall 1: A hat drei reelle Eigenwerte. Da A orthogonal ist, muss jeder Eigenwert entweder 1 oder -1 sein. Wären alle drei Eigenwerte -1, dann folgte $\det A = (-1)^3 = -1$, also $A \notin \mathrm{SO}(3)$, ein Widerspruch.

Fall 2: A hat genau einen reellen Eigenwert. Sind λ_1, λ_2 die beiden nicht reellen Eigenwerte, dann gilt $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, also $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = 1$. Der reelle Eigenwert kann nur 1 oder -1 sein, da A orthogonal ist. Wäre er -1, dann folgte

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\overline{\lambda_1} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = (-1),$$

also $A \notin \mathrm{SO}(3)$, ein Widerspruch.

In beiden Fällen hat A also den Eigenwert 1, was den Satz vom Fußball zeigt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Satz von Thales)
Sei E ein zweidimensionaler euklidischer Raum, $p \in E$ und $r > 0$. Bezeichne

$$\partial B_r(p) := \{x \in E \ : \ \|x-p\| = r\}$$

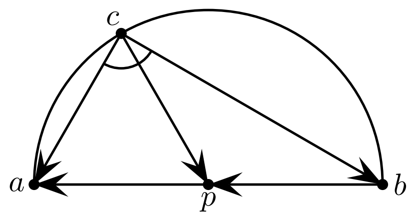
den Kreis um p vom Radius r. Zeigen Sie den *Satz von Thales*: Seien $a,b,c \in \partial B_r(p)$ drei verschiedene Punkte, so dass p auf der Strecke von a nach b liegt. Dann stehen die Strecken von c nach a und von c nach b senkrecht aufeinander.
Fertigen Sie dafür zunächst eine Skizze an.

Lösung: Bezeichne p den Mittelpunkt zwischen a und b. Insbesondere gilt $p-b=a-p$, so dass wir

$$b-c=(p-c)-(p-b)=(p-c)-(a-p) \quad \text{sowie} \quad a-c=(p-c)-(p-a) \tag{$*$}$$

folgern können. Da alle Punkte auf dem Kreis liegen, gilt auch

$$\|p-a\|=\|p-b\|=\|p-c\|=r.$$



Variante 1: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\langle a-c,b-c\rangle &= \big\langle (p-c)-(p-a),(p-c)-(a-p)\big\rangle \\ &= r^2-\big\langle p-a,p-c\big\rangle-\big\langle a-p,p-c\big\rangle-r^2 \\ &= \big\langle p-c,(a-p)+(p-a)\big\rangle = 0.\end{aligned}$$

Variante 2: Wir setzen $v:=p-c$ und $w:=b-p$. Dann gilt nach $(*)$

$$v+w=b-c \qquad \text{und} \qquad v-w=a-c$$

und mit Tutoriumsaufgabe T4 von Tutoriumsblatt 8 folgt

$$b-c\perp a-c \iff \|p-c\|=\|b-p\|,$$

was zu zeigen war.

Aufgabe H2 (Isometrien sind linear, Teil II)
Sei $f:V\to V$ eine Isometrie des euklidischen Raums V. Zeigen Sie, dass f linear ist, wenn $f(0)=0$ gilt.
Anleitung:

(a) Zeigen Sie, dass $\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$ für alle $x,y\in V$ gilt und folgern Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f Mittelpunkte respektiert, also dass $f(m(x,y))=m(f(x),f(y))$ für alle $x,y\in V$ gilt.

(c) Zeigen Sie $f(2^k x)=2^k f(x)$ für alle $k\in\mathbb{Z}$ und $x\in V$ und folgern Sie die Additivität von f.

(d) Zeigen Sie $f(-x)=-f(x)$ für alle $x\in V$.

(e) Zeigen Sie $f(nx)=nf(x)$ für alle $n\in\mathbb{Z}$ und $f(qx)=qf(x)$ für alle rationalen Zahlen der Form $\frac{m}{2^k}$ und alle $x\in V$.

(f) Benutzen Sie die Stetigkeit von f, um die Linearität zu erhalten.

Lösung:

(a) Es ist

$$\|f(x)-f(y)\|^2=\|f(x)\|^2-2\,\langle f(x),f(y)\rangle+\|f(y)\|^2=\|x\|^2-2\,\langle x,y\rangle+\|y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\|x-y\|^2.$$

Damit folgt sofort die Stetigkeit, etwa durch das ε-δ-Kriterium mit $\delta:=\varepsilon$.

(b) Wir berechnen

$$d(f(m(x,y)),f(x))=d(m(x,y),x)=\frac{1}{2}d(x,y)=\frac{1}{2}d(f(x),f(y)).$$

Durch vertauschen von x und y erhalten wir genauso $d(f(m(x,y)),f(y))=\frac{1}{2}d(f(x),f(y))$.
Aus der Eindeutigkeit des Mittelpunkts folgt dann die Behauptung.

(c) Für $y=0$ folgt für alle $x \in V$ aus der Mittelpunktsbedingung

$$f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}f(x),$$

was natürlich äquivalent zu

$$f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

ist, und daher $f(2y) = 2f(y)$ für alle $y \in V$ (dabei haben wir $f(0) = 0$ benutzt!). Induktiv erhalten wir $f(2^k x) = 2^k f(x)$ für alle $x \in V$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Additivität erhalten wir dann durch

$$f(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(2x+2y)\right) = \frac{1}{2}(f(2x)+f(2y)) = \frac{1}{2}(2f(x)+2f(y)) = f(x)+f(y).$$

(d) Wir setzen in die Additivität ein $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$.

(e) Durch die Additivität erhalten wir induktiv $f(mx) = mf(x)$ für $m \in \mathbb{N}$ und mit $f(-x) = -f(x)$ sogar für alle $m \in \mathbb{Z}$. Unter Benutzung von (c) folgt

$$f(qx) = f\left(m\left(2^{-k}x\right)\right) = mf(2^{-k}x) \overset{(c)}{=} m2^{-k}f(x) = qf(x).$$

(f) Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ können wir ein $m(k) \in \mathbb{Z}$ finden, so dass für $\lambda_k := m(k)2^{-k}$ die Bedingung $|\lambda - \lambda_k| < 2^{-k}$ erfüllt ist und insbesondere λ_k gegen λ konvergiert. Beispielsweise können wir $m(k) := \lfloor 2^k \lambda \rfloor$ wählen, denn dann ist

$$|\lambda - \lambda_k| < \frac{1}{2^k} \iff \left|\lambda - \frac{\lfloor 2^k\lambda\rfloor}{2^k}\right| < \frac{1}{2^k} \iff |2^k\lambda - \lfloor 2^k\lambda\rfloor| < 1,$$

und die letzte Ungleichung ist klar.
Damit folgt schließlich

$$f(\lambda x) = f\left(\lim_{k\to\infty}\lambda_k x\right) \overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{k\to\infty} f(\lambda_k x) \overset{(e)}{=} \lim_{k\to\infty}\lambda_k f(x) = \lambda f(x).$$

Gemeinsam mit der Additivität aus (c) folgt, dass f linear ist.

Aufgabe H3 (Harmonische Analysis)
Aus der Vorlesung *Analysis* wissen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

konvergiert (woraus folgt das?). In dieser Aufgabe benutzen wir Methoden der linearen Algebra, um den konkreten Wert dieser Reihe zu bestimmen.
Sei $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Bezeichne π_n die Projektion auf dem Raum

$$\mathcal{T}_n := \operatorname{span}\left\{T = \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k + \beta_k w_k\right\}$$

der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$, wobei

$$v_k(x) = \cos(2\pi k x) \qquad \text{und} \qquad w_k(x) = \sin(2\pi k x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

seien (siehe auch Seite 204 im Skript).

(a) Skizzieren oder plotten Sie f im Intervall $[-2,2]$ und lassen Sie ggf. Platz in der Skizze, um später $\pi_3(f)$ einzufügen.

(b) Berechnen Sie $\pi_N(f)$ für beliebiges $N \in \mathbb{N}$. Das Integral einer stückweise stetigen Funktion verstehen wir dabei als Summe der Integrale über die stetigen Abschnitte.

(c) Fügen Sie $\pi_3(f)$ in ihre Skizze (oder den Plot) aus (a) ein.

(d) Man kann zeigen, dass $\pi_N(f)$ für $N \to \infty$ in allen Punkten $x \in (0, \frac{1}{2})$ gegen f konvergiert. Nutzen Sie diese Erkenntnis, um den Reihenwert der unendlichen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

zu berechnen.

Lösung:

(a) Siehe (c).

(b) Es sind die Koeffizienten α_k und β_k zu berechnen. Da $x \mapsto \cos(2\pi kx)$ achsensymmetrisch zu $x = \frac{1}{2}$ ist, gilt

$$\frac{1}{2}\alpha_k = \int_0^1 f(x)\cos(2\pi kx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi kx)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(2\pi kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Andererseits ist $x \mapsto \sin(2\pi kx)$ punktsymmetrisch zu $x = \frac{1}{2}$, so dass

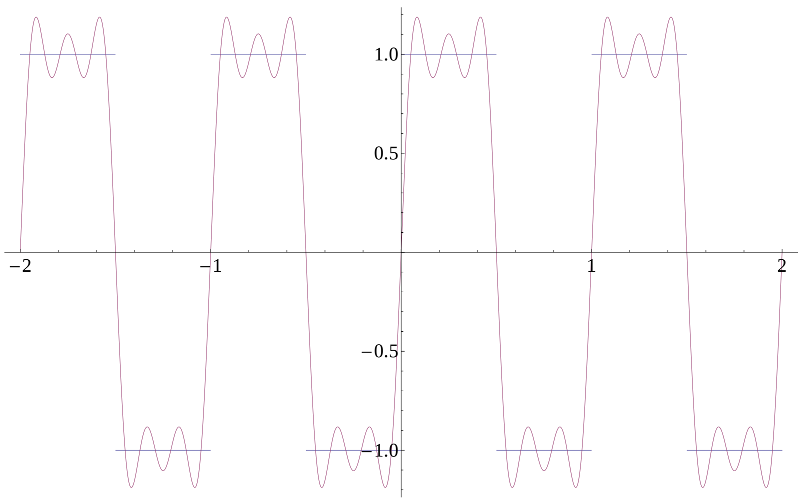
$$\frac{1}{2}\beta_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi kx)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(2\pi kx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) = \frac{1}{k\pi}\left(1+(-1)^{k+1}\right)$$

folgt.

Insgesamt folgern wir

$$\begin{aligned}
\pi_{2N-1}(f)(x) &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1+(-1)^{k+1}}{k}\sin(2\pi kx)\\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(6\pi x) + \frac{1}{5}\sin(10\pi x) + \dots + \frac{1}{2N-1}\sin(2\pi(2N-1)x)\right)\\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k-1}\sin(2\pi(2k-1)x).
\end{aligned}$$

(c) Hier der Plot mit der Fourierapproximation:



(d) Laut der Aufgabe gilt $f\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{N\to\infty} \pi_N(f)\left(\frac{1}{4}\right)$. Außerdem ist $\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$ und daher können wir berechnen:

$$1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

Daraus folgern wir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$