# Lineare Algebra II
# 9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Kollross**
Susanne Kürsten
Tristan Alex

**SS 2011**
**15./16. Juni 2011**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Minitest: ohne Benutzung des Skripts und innerhalb von 10 Minuten!)
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Ein normierter Raum ist immer auch ein metrischer Raum.
- ☐ Ein metrischer Raum ist immer auch ein normierter Raum.
- ☐ Ein euklidischer Raum ist immer auch ein metrischer Raum.
- ☐ Ein normierter Raum ist immer auch ein euklidischer Raum.
- ☐ Isometrien sind immer invertierbar.
- ☐ Isometrien sind immer injektiv.
- ☐ Isometrien können 0 als Eigenwert haben.
- ☐ Orthogonale Projektionen sind Isometrien.
- ☐ Isometrien endlichdimensionaler Räume bilden Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab.
- ☐ Hintereinanderausführungen von Isometrien sind Isometrien.
- ☐ Längenerhaltende Abbildungen erhalten auch Winkel.
- ☐ Winkelerhaltende Abbildungen erhalten auch Längen.

**Aufgabe G2** (Zum Aufwärmen: Isometrien und Orthonormalbasen)

(a) Bestimmen Sie alle abstandserhaltenden Abbildungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also alle Abbildungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Bedingung $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ erfüllen.
*Tipp:* Untersuchen Sie erst den Fall $\varphi(0) = 0$ und führen Sie dann $\varphi(0) \neq 0$ auf diesen Fall zurück.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Isometrien $\varphi : V \to V$ sind surjektiv.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit den Spalten $(b_1, \dots, b_n)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   i. $A^T A = E_n$.
   ii. $(b_1, \dots, b_n)$ bildet ein Orthonormalsystem bezüglich des Standardskalarprodukts.

**Aufgabe G3** (Isometrien sind linear, Teil I)

(a) Sei $V$ ein euklidischer Raum. Zeigen Sie, dass es zu je zwei Punkten $x, y \in V$ einen eindeutig bestimmten Punkt $m(x, y)$ gibt, der

$$d(x, m(x, y)) = d(y, m(x, y)) = \frac{1}{2} d(x, y)$$

erfüllt. Dieser heißt *Mittelpunkt* von $x$ und $y$.
*Tipp:* Skizzieren Sie sich die Menge $M := \{z \in V \ : \ d(x,z) = d(y,z)\}$ und benutzen Sie den Satz von Pythagoras.

(b) Sei $W$ ein Vektorraum und sei $d\colon W \times W \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,y) := 1 - \delta_{xy}$. Zeigen Sie, dass $d$ eine Metrik ist und dass es in $(W,d)$ keinen eindeutig bestimmten Mittelpunkt zwischen zwei Punkten $x \neq y$ gibt. Was ist mit $x = y$?

*Erinnerung:* Eine *Metrik* auf $V$ ist eine positiv definite, symmetrische Abbildung $d\colon V \times V \to V$, welche die Dreiecksungleichung erfüllt. Schlagen Sie diese Begriffe nach, wenn Sie sie noch nicht können!

**Aufgabe G4** (Der Satz vom Fußball)
Betrachten Sie ein Fußballspiel, das in zwei Halbzeiten von je 90 Minuten zwischen zwei Mannschaften ausgetragen wird. Auf dem Spielfeld gibt es einen Anstoßpunkt, auf den zu Beginn jeder der beiden Halbzeiten ein perfekt runder Fußball aufgelegt wird.
Zeigen Sie den *Satz vom Fußball*: Es gibt zwei Punkte auf dem Fußball, die zu Spielbeginn und zur Halbzeit genau an der gleichen Stelle liegen.
*Tipp:* Was hat das mit Eigenwerten von Abbildungen aus SO(3) zu tun?

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Satz von Thales)
Sei $E$ ein zweidimensionaler euklidischer Raum, $p \in E$ und $r > 0$. Bezeichne

$$\partial B_r(p) := \{x \in E \ : \ \|x - p\| = r\}$$

den Kreis um $p$ vom Radius $r$. Zeigen Sie den *Satz von Thales*: Seien $a, b, c \in \partial B_r(p)$ drei verschiedene Punkte, so dass $p$ auf der Strecke von $a$ nach $b$ liegt. Dann stehen die Strecken von $c$ nach $a$ und von $c$ nach $b$ senkrecht aufeinander.
Fertigen Sie dafür zunächst eine Skizze an.

**Aufgabe H2** (Isometrien sind linear, Teil II)
Sei $f : V \to V$ eine Isometrie des euklidischen Raums $V$. Zeigen Sie, dass $f$ linear ist, wenn $f(0) = 0$ gilt.
*Anleitung:*

(a) Zeigen Sie, dass $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$ gilt und folgern Sie, dass $f$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f$ Mittelpunkte respektiert, also dass $f(m(x,y)) = m(f(x), f(y))$ für alle $x, y \in V$ gilt.

(c) Zeigen Sie $f(2^k x) = 2^k f(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in V$ und folgern Sie die Additivität von $f$.

(d) Zeigen Sie $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in V$.

(e) Zeigen Sie $f(nx) = nf(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $f(qx) = qf(x)$ für alle rationalen Zahlen der Form $\frac{m}{2^k}$ und alle $x \in V$.

(f) Benutzen Sie die Stetigkeit von $f$, um die Linearität zu erhalten.

**Aufgabe H3** (Harmonische Analysis)
Aus der Vorlesung *Analysis* wissen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

konvergiert (woraus folgt das?). In dieser Aufgabe benutzen wir Methoden der linearen Algebra, um den konkreten Wert dieser Reihe zu bestimmen.
Sei $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Bezeichne $\pi_n$ die Projektion auf dem Raum

$$\mathcal{T}_n := \operatorname{span}\left\{ T = \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k + \beta_k w_k \right\}$$

der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$, wobei

$$v_k(x) = \cos(2\pi k x) \qquad \text{und} \qquad w_k(x) = \sin(2\pi k x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

seien (siehe auch Seite 204 im Skript).

(a) Skizzieren oder plotten Sie $f$ im Intervall $[-2,2]$ und lassen Sie ggf. Platz in der Skizze, um später $\pi_3(f)$ einzufügen.

(b) Berechnen Sie $\pi_N(f)$ für beliebiges $N \in \mathbb{N}$. Das Integral einer stückweise stetigen Funktion verstehen wir dabei als Summe der Integrale über die stetigen Abschnitte.

(c) Fügen Sie $\pi_3(f)$ in ihre Skizze (oder den Plot) aus (a) ein.

(d) Man kann zeigen, dass $\pi_N(f)$ für $N \to \infty$ in allen Punkten $x \in (0, \frac{1}{2})$ gegen $f$ konvergiert. Nutzen Sie diese Erkenntnis, um den Reihenwert der unendlichen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

zu berechnen.