Lineare Algebra II
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
01./09. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei weiterhin $\pi: V \to V$ die orthogonale Projektion auf den endlichdimensionalen Unterraum $U \subsetneq V$. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $u \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$?

- ☐ π ist injektiv.
- ☐ π ist ein Isomorphismus.
- ☐ Wenn v_1 senkrecht auf v_2 steht, dann stehen auch $\pi(v_1)$ und $\pi(v_2)$ senkrecht aufeinander.
- ☐ $\|\pi(v)\| = \|v\|$.
- ☐ $\pi^2(v) = v$.
- ☐ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\pi^n = \mathrm{id}$ gilt.
- ☐ π ist nilpotent.
- ☐ π ist invertierbar.
- ☐ π kann negative Eigenwerte haben.
- ☐ $\pi(v)$ steht senkrecht auf v.
- ☐ $\pi(u)$ steht senkrecht auf u.
- ☐ $\pi(v)$ steht senkrecht auf u.
- ☐ $\pi(u)$ steht senkrecht auf v.
- ☐ $\ker \pi \cup \operatorname{im} \pi = V$.
- ☐ $\ker \pi \cap \operatorname{im} \pi = \emptyset$.
- ☐ $\dim \ker \pi \leq \dim \operatorname{im} \pi$.
- ☐ $\dim \ker \pi \geq \dim \operatorname{im} \pi$.
- ☐ $\dim \ker \pi = \dim \operatorname{im} \pi$.

Lösung: Alle Aussagen sind falsch.

Aufgabe G2 (Isometrien)
Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ zwischen euklidischen oder unitären Vektorräumen heißt *Isometrie*, falls für alle $x, y \in V$ die Gleichung

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

erfüllt ist.
Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ äquivalent sind:

(a) φ ist eine Isometrie.

(b) $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$.

(c) $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$.

Tipp: Polarisierungsgleichung.

Lösung:

(a) $\Longrightarrow$ (b) Folgt sofort für $x = y$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Wir setzen in $\|\varphi(z)\| = \|z\|$ einfach $z := x - y$ ein und benutzen die Linearität von φ.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Wir setzen die Polarisierungsgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 4\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle &\overset{\text{Pol.}}{=} \|\varphi(x) - \varphi(-y)\|^2 - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 + i\|\varphi(x) - \varphi(-iy)\|^2 - i\|\varphi(x) - \varphi(iy)\|^2 \\ &\overset{\text{(c)}}{=} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \\ &\overset{\text{Pol.}}{=} 4\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Diagonalisierung von orthogonalen Projektionen)
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $\pi \colon V \to V$ die orthogonale Projektion auf $U \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie, dass π nur die Eigenwerte 0 und 1 hat.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie:
- Es gibt orthogonale Projektionen, die nur 1 als Eigenwert haben.
- Es gibt orthogonale Projektionen, die nur 0 als Eigenwert haben.

(c) Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, bezüglich der π die Matrixdarstellung

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Dabei sei $k = \dim \operatorname{im} \pi$ und E_k die $k \times k$-Einheitsmatrix.

(d) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Projektion diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Sei λ ein Eigenwert von π mit zugehörigem Eigenvektor x. Dann gilt $\pi(x) = \lambda x$. Auf diese Gleichung wenden wir wiederum π an und erhalten $\lambda^2 x = \pi^2(x) = \pi(x) = \lambda x$. Da $x \neq 0$ ist, muss $\lambda^2 = \lambda$ gelten. Die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind 0 und 1.

(b) Beide Aussagen sind wahr. Sind alle Eigenwerte 1, erhält man die orthogonale Projektion id_V. Sind alle Eigenwerte 0, erhält man die Nullabbildung, die natürlich auch eine orthogonale Projektion ist.

(c) Es ist $V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$ und $\operatorname{im} \pi = U$ steht senkrecht auf $U^\perp = \ker \pi$. Wir wählen uns eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ von U. Diese ergänzen wir mit Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_n \in U^\perp$. Dann gilt $\pi(v_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq k$ und $\pi(v_j) = 0$ für $k < j \leq n$. Daher hat π bezüglich dieser Basis genau die geforderte Matrixdarstellung.

(d) Das folgt trivialerweise aus (c).

Aufgabe G4 (Skalarprodukte)

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ positive Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j^{-2}\right) \geq n^2$$

gilt.

(b) Sei V ein Vektorraum, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Weiter sei

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(b_1, b_1) & \cdots & f(b_1, b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(b_n, b_1) & \cdots & f(b_n, b_n) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die Strukturmatrix der Bilinearform f ist, das heißt, für beliebige Vektoren $x, y \in V$ bezüglich der Basis B gilt

$$f(x, y) = x^T A y.$$

Bestimmen Sie die Strukturmatrix des Standardskalarproduktes bezüglich der Standardbasis.

(c) Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass zu jeder linearen Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ ein Vektor $a \in V$ existiert mit $f(x) = \langle x, a\rangle$ für alle $x \in V$.

Lösung:

(a) Setzen wir $x = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $y = (a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})^T \in \mathbb{R}^n$, dann folgt die Behauptung sofort aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(b) Sei $x, y \in V$ beliebig. Es gelte $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ und $y = \sum_{j=1}^n y_j b_j$. Daraus folgt mit Hilfe der Bilinearität

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{j=1}^n y_j b_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j f(b_i, b_j) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = x^T A y.$$

Für das Standardskalarprodukt gilt $\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{ij}$ und folglich ist die Einheitsmatrix die Strukturmatrix des Standardskalarproduktes bezüglich der Standardbasis.

(c) Der Raum V besitzt eine Orthonormalbasis $B := (b_1, \dots, b_n)$. Für einen Vektor $x \in V$ gilt $x = \sum_{j=1}^n \langle x, b_j\rangle b_j$. Wir erhalten

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \langle x, b_j\rangle b_j\right) = \sum_{j=1}^n \langle x, b_j\rangle f(b_j) = \sum_{j=1}^n f(b_j)\langle x, b_j\rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^n \overline{f(b_j)} b_j \right\rangle,$$

woraus zu ersehen ist, dass $a := \sum_{j=1}^n \overline{f(b_j)} b_j$ der gesuchte Vektor ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Orthogonale Zerlegung)
Betrachte den euklidischen Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller $n \times n$-Matrizen mit Spur-Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^T A)$. Bezeichne mit

$$U_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\} \subset M_n(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad U_- := \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^T = -B\}$$

die Teilmengen der symmetrischen beziehungsweise schiefsymmetrischen Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass U_+ und U_- lineare Teilräume sind und $(U_+)^\perp = U_-$ erfüllen.

(b) Welche Dimension haben die Räume U_+ und U_-?

(c) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix schreiben lässt.

(d) Bestimmen Sie die orthogonalen Projektionen π_+ auf U_+ und π_- auf U_-.

Tipp: Induktiv lässt sich leicht $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ zeigen.

Lösung: Es gilt

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}((B^T A)^T) = \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(BA^T) = \left\langle A^T, B^T \right\rangle .$$

(a) Die Nullmatrix ist sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch. Es ist einfach zu zeigen, dass Summen und Vielfache von symmetrischen (schiefsymmetrischen) Matrizen wieder symmetrisch (schiefsymmetrisch) sind.
Für die Orthogonalitätsbedingung sei $A \in U_+$ und $B \in U_-$. Dann ist

$$\langle A, B\rangle = \left\langle A^T, B^T \right\rangle = -\langle A, B\rangle ,$$

also $\langle A, B\rangle = 0$ und es ist $B \in (U_+)^\perp$. Wir folgern $U_- \subseteq (U_+)^\perp$. Für die andere Inklusion sei $A \in (U_+)^\perp$, also $\langle A, B\rangle = 0$ für alle $B \in U_+$. Dann folgt für alle Matrizen $X \in M_n(\mathbb{R})$

$$\left\langle A + A^T, X \right\rangle = \langle A, X\rangle + \left\langle A^T, X \right\rangle = \langle A, X\rangle + \left\langle A, X^T \right\rangle = \left\langle A, X + X^T \right\rangle = 0,$$

denn die Matrix $X + X^T$ ist symmetrisch. Da das Skalarprodukt positiv definit ist, muss $A + A^T = 0$ gelten, also $A \in U_-$. Wir folgern $(U_+)^\perp \subseteq U_-$, insgesamt gilt damit $(U_+)^\perp = U_-$.

(b) Sei $A \in U_+$. Aus $A^T = A$ erkennen wir $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \le i, j \le n$. Alle Einträge der Matrix sind also durch die Wahl der Einträge im oberen rechten Dreieck der Matrix einschließlich der Diagonalen bestimmt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir können also in der ersten Zeile n Einträge wählen, in der zweiten Zeile $n-1$ Einträge und so weiter. Daher ist

$$\dim U_+ = n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Für U_- gehen wir genauso vor. Hier ist allerdings $a_{ii} = -a_{ii}$, also $a_{ii} = 0$ für alle $1 \le i \le n$. Wir können also in der ersten Zeile $n-1$ Einträge wählen, in der zweiten Zeile $n-2$ Einträge und so weiter. Es folgt

$$\dim U_- = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) - n.$$

Insbesondere gilt $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2 = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - n = \dim U_+ + \dim U_-$.

(c) Da die beiden Räume orthogonal zueinander sind, gilt $M_n(\mathbb{R}) = U_+ \oplus U_-$. Es existiert also zu jeder Matrix die geforderte Zerlegung.

(d) Um die Zerlegung $A = A_+ + A_-$ mit $A_\pm \in U_\pm$ zu erhalten, lösen wir die Gleichungen

$$A = A_+ + A_- \qquad \text{und} \qquad A^T = (A_+ + A_-)^T = A_+ - A_-$$

nach $A_\pm$ auf und erhalten $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$. Daraus lesen wir $\pi_+(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $\pi_-(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$ ab.

Aufgabe H2 (Numerische Approximation)
Sei $V := \mathcal{C}([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $U := \operatorname{span}\{1, x\}$ der Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 1. Wir statten V mit dem Skalarprodukt

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

aus. In dieser Aufgabe finden wir eine gute Näherung für die Funktion $x \mapsto e^x$.

(a) Welche Dimension haben die Räume U und V?

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U.

(c) Benutzen Sie die Approximationseigenschaft der Orthogonalprojektion, um die optimale Näherung $g(x)$ für e^x zu berechnen.

(d) Skizzieren oder plotten Sie die Funktionen e^x und $g(x)$ in einem Koordinatensystem.

Beachten Sie, dass wir für die Bestimmung von $g(x)$ keine Differentialrechnung verwendet haben.
Tipp: Es ist $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$.

Lösung: Wir werden in dieser Aufgabe oft Skalarprodukte berechnen. Wegen der Linearität reicht uns die Berechnung von

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \langle 1, x \rangle = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \qquad \langle 1, e^x \rangle = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - 1$$

$$\langle e^x, e^x \rangle = \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \qquad \langle x, e^x \rangle = \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$$

aus, um alle auftretenden Produkte zu bestimmen.

(a) U hat natürlich Dimension 2, da 1 und x linear unabhängig sind. Die Dimension von V ist unendlich, denn es ist insbesondere $x^k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und diese Vektoren sind auch alle linear unabhängig.

(b) Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert uns

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = \frac{x - \langle x, 1 \rangle 1}{\|x - \langle x, 1 \rangle 1\|} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\langle x, x \rangle - \langle x, 1 \rangle + \frac{1}{4}\langle 1, 1 \rangle\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}(2x - 1).$$

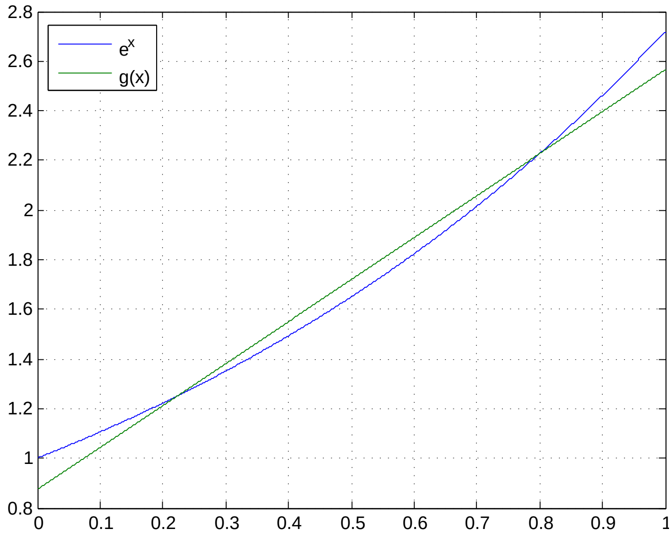
(c) Wir bestimmen die Darstellung $g(x) = \lambda_1 1 + \lambda_2(\sqrt{3}(2x-1))$, wobei $\lambda_i = \langle e^x, v_i \rangle$.
Es ist

$$\lambda_1 = \langle e^x, 1 \rangle = e - 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \left\langle \sqrt{3}(2x-1), e^x \right\rangle = 2\sqrt{3}\langle x, e^x \rangle - \sqrt{3}\langle e^x, 1 \rangle = 2\sqrt{3} - (e-1)\sqrt{3} = \sqrt{3}(3 - e).$$

Die beste Näherung ist also

$$g(x) = (e - 1) + 3(3 - e)(2x - 1) = (18 - 6e)x + 4e - 10.$$

(d) Die Skizze der beiden Funktionen sieht so aus:



Aufgabe H3 (Spiegelung an einer Hyperebene)
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $v \in V$ ein Einheitsvektor. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\sigma_v : V \to V, \quad x \mapsto x - 2\langle x, v\rangle\, v.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung σ_v ist eine bijektive Isometrie.

(b) Der von v aufgespannte Teilraum $\mathbb{R}v$ ist der Eigenraum von σ_v zum Eigenwert -1 und sein Orthogonalraum der Eigenraum zum Eigenwert 1.

Seien nun $v, w \in V$ zwei Einheitsvektoren. Bezeichne U den von v und w aufgespannten linearen Teilraum. Betrachten Sie die linearen Abbildungen σ_v und σ_w. Zeigen Sie:

(c) Der Teilraum U ist σ_v-invariant und σ_w-invariant, d.h. es gilt $\sigma_v(U) \subseteq U$ und $\sigma_w(U) \subseteq U$.

(d) Für alle $x \in U^\perp$ gilt $\sigma_v(x) = x = \sigma_w(x)$.

(e) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   i. Die Vektoren v und w sind linear abhängig oder orthogonal zueinander.
   ii. Die Abbildungen σ_v und σ_w kommutieren, d.h. $\sigma_v \circ \sigma_w = \sigma_w \circ \sigma_v$.

Lösung:

(a) Die Abbildung ist bijektiv, denn es ist

$$(\sigma_v \circ \sigma_v)(x) = \sigma_v(x - 2\langle x, v\rangle\, v) = x - 2\langle x, v\rangle\, v - 2\langle x, v\rangle\,(v - 2\langle v, v\rangle\, v) = x.$$

Sie ist isometrisch, denn für alle $x_1, x_2 \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \sigma_v(x_1), \sigma_v(x_2)\rangle &= \langle x_1 - 2\langle x_1, v\rangle\, v, x_2 - 2\langle x_2, v\rangle\, v\rangle \\ &= \langle x_1, x_2\rangle - 2\langle x_1, v\rangle\langle x_2, v\rangle - 2\langle x_1, v\rangle\langle v, x_2\rangle + 4\langle x_1, v\rangle\langle x_2, v\rangle\langle v, v\rangle \\ &= \langle x_1, x_2\rangle.\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\sigma_v(v) = v - 2\langle v, v\rangle\, v = -v$, d.h. $U = \mathbb{R}\, v$ ist enthalten im Eigenraum zum Eigenwert -1. Für jeden Vektor $x \in U^\perp$ gilt $\sigma_v(x) = x - 2\langle x, v\rangle\, v = x$, d.h. $U^\perp$ ist enthalten im Eigenraum zum Eigenwert 1. Wegen $V = U \oplus U^\perp$ müssen U und $U^\perp$ mit dem entspr. Eigenräumen übereinstimmen.

(c) Es genügt die Behauptung für σ_v zu zeigen. Für σ_w ergibt sich die Behauptung durch Vertauschen der Rollen von v und w. Weiter genügt es $\sigma_v(v) \in U$ und $\sigma_v(w) \in U$ zu zeigen, denn σ_v ist linear und jeder andere Vektor in U ist eine Linearkombination von v und w.
Für den Vektor v gilt $\sigma_v(v) = -v \in U$ (s.o.), für den Vektor w gilt $\sigma_v(w) = w - 2\langle w, v\rangle\, v \in U$.

(d) Auch hier genügt es die Aussage für σ_v zu zeigen: Sei $x \in U^\perp$, also insbesondere $\langle x, v\rangle = 0 = \langle x, w\rangle$. Dann gilt $\sigma_v(x) = x - \langle x, v\rangle\, v = x$.

(e) Seien zuerst v, w linear abhängig oder orthogonal zueinander. Zum einen lässt sich direkt zeigen, dass die Abbildungen vertauschen. Man kann die Behauptung jedoch auch aus bereits Gezeigtem herleiten: Wegen $V = U \oplus U^\perp$ genügt es die Gleichung $\sigma_v \circ \sigma_w = \sigma_w \circ \sigma_v$ auf U und auf $U^\perp$ einzeln zu zeigen. Auf $U^\perp$ haben wir direkt zuvor gezeigt, dass σ_v und σ_w beide die Identität sind, insbesondere also vertauschen. Auf U müssen wir die Gleichheit auf den zwei Vektoren v, w nachweisen.
Sind v und w linear abhängig, so haben wir zuvor gezeigt, dass U für σ_v, σ_w der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist. Die Abbildungen sind beide also ein Vielfaches der Identität auf diesem Teilraum. Insbesondere vertauschen sie.
Stehen v und w orthogonal zueinander, so gilt nach (b) die Identität $\sigma_v(w) = w$ (und umgekehrt für v und σ_w), d.h. es gilt

$$\sigma_v\big(\sigma_w(w)\big) = \sigma_v(-w) = -w = \sigma_v(-w) = \sigma_w\big(\sigma_v(w)\big)$$

und analog für den Vektor v. Zusammengefasst haben wir damit die erste Implikation gezeigt.
Wir nehmen nun an, die Abbildungen σ_v, σ_w kommutieren. Für alle $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}(\sigma_v \circ \sigma_w)(x) &= x - 2\langle x, w\rangle\, w - 2\langle x, v\rangle\, v + 4\langle x, w\rangle\langle w, v\rangle\, v, \\ (\sigma_w \circ \sigma_v)(x) &= x - 2\langle x, v\rangle\, v - 2\langle x, w\rangle\, w + 4\langle x, v\rangle\langle v, w\rangle\, w.\end{aligned}$$

Speziell für $x = v$ folgt dann $\langle v, w\rangle\, w = \langle v, w\rangle^2\, v$. Die Vektoren v, w sind also entweder orthogonal, d.h. $\langle v, w\rangle = 0$, oder linear abhängig.