Lineare Algebra II
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
01./09. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei weiterhin $\pi: V \to V$ die orthogonale Projektion auf den endlichdimensionalen Unterraum $U \subsetneq V$. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $u \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$?

- ☐ π ist injektiv.
- ☐ π ist ein Isomorphismus.
- ☐ Wenn v_1 senkrecht auf v_2 steht, dann stehen auch $\pi(v_1)$ und $\pi(v_2)$ senkrecht aufeinander.
- ☐ $\|\pi(v)\| = \|v\|$.
- ☐ $\pi^2(v) = v$.
- ☐ Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\pi^n = \mathrm{id}$ gilt.
- ☐ π ist nilpotent.
- ☐ π ist invertierbar.
- ☐ π kann negative Eigenwerte haben.
- ☐ $\pi(v)$ steht senkrecht auf v.
- ☐ $\pi(u)$ steht senkrecht auf u.
- ☐ $\pi(v)$ steht senkrecht auf u.
- ☐ $\pi(u)$ steht senkrecht auf v.
- ☐ $\ker \pi \cup \operatorname{im} \pi = V$.
- ☐ $\ker \pi \cap \operatorname{im} \pi = \emptyset$.
- ☐ $\dim \ker \pi \leq \dim \operatorname{im} \pi$.
- ☐ $\dim \ker \pi \geq \dim \operatorname{im} \pi$.
- ☐ $\dim \ker \pi = \dim \operatorname{im} \pi$.

Aufgabe G2 (Isometrien)
Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ zwischen euklidischen oder unitären Vektorräumen heißt *Isometrie*, falls für alle $x, y \in V$ die Gleichung

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

erfüllt ist.
Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ äquivalent sind:

(a) φ ist eine Isometrie.

(b) $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$.

(c) $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$.

Tipp: Polarisierungsgleichung.

Aufgabe G3 (Diagonalisierung von orthogonalen Projektionen)
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $\pi\colon V \to V$ die orthogonale Projektion auf $U \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie, dass π nur die Eigenwerte 0 und 1 hat.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie:
- Es gibt orthogonale Projektionen, die nur 1 als Eigenwert haben.
- Es gibt orthogonale Projektionen, die nur 0 als Eigenwert haben.

(c) Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, bezüglich der π die Matrixdarstellung

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Dabei sei $k = \dim \operatorname{im} \pi$ und E_k die $k \times k$-Einheitsmatrix.

(d) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Projektion diagonalisierbar ist.

Aufgabe G4 (Skalarprodukte)

(a) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ positive Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{-2}\right) \geq n^2$$

gilt.

(b) Sei V ein Vektorraum, $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Weiter sei

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(b_1, b_1) & \cdots & f(b_1, b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(b_n, b_1) & \cdots & f(b_n, b_n) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die Strukturmatrix der Bilinearform f ist, das heißt, für beliebige Vektoren $x, y \in V$ bezüglich der Basis B gilt

$$f(x, y) = x^T A y.$$

Bestimmen Sie die Strukturmatrix des Standardskalarproduktes bezüglich der Standardbasis.

(c) Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass zu jeder linearen Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ ein Vektor $a \in V$ existiert mit $f(x) = \langle x, a \rangle$ für alle $x \in V$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Orthogonale Zerlegung)
Betrachte den euklidischen Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller $n \times n$-Matrizen mit Spur-Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^T A)$. Bezeichne mit

$$U_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\} \subset M_n(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad U_- := \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^T = -B\}$$

die Teilmengen der symmetrischen beziehungsweise schiefsymmetrischen Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass U_+ und U_- lineare Teilräume sind und $(U_+)^\perp = U_-$ erfüllen.

(b) Welche Dimension haben die Räume U_+ und U_-?

(c) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix schreiben lässt.

(d) Bestimmen Sie die orthogonalen Projektionen π_+ auf U_+ und π_- auf U_-.

Tipp: Induktiv lässt sich leicht $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ zeigen.

Aufgabe H2 (Numerische Approximation)
Sei $V := \mathcal{C}([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $U := \operatorname{span}\{1, x\}$ der Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 1. Wir statten V mit dem Skalarprodukt

$$\langle f(x), g(x)\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

aus. In dieser Aufgabe finden wir eine gute Näherung für die Funktion $x \mapsto e^x$.

(a) Welche Dimension haben die Räume U und V?

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U.

(c) Benutzen Sie die Approximationseigenschaft der Orthogonalprojektion, um die optimale Näherung $g(x)$ für e^x zu berechnen.

(d) Skizzieren oder plotten Sie die Funktionen e^x und $g(x)$ in einem Koordinatensystem.

Beachten Sie, dass wir für die Bestimmung von $g(x)$ keine Differentialrechnung verwendet haben.
Tipp: Es ist $\int_0^1 x e^x \,\mathrm{d}x = 1$.

Aufgabe H3 (Spiegelung an einer Hyperebene)
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $v \in V$ ein Einheitsvektor. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\sigma_v : V \to V, \quad x \mapsto x - 2\langle x, v\rangle\, v.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung σ_v ist eine bijektive Isometrie.

(b) Der von v aufgespannte Teilraum $\mathbb{R}v$ ist der Eigenraum von σ_v zum Eigenwert -1 und sein Orthogonalraum der Eigenraum zum Eigenwert 1.

Seien nun $v, w \in V$ zwei Einheitsvektoren. Bezeichne U den von v und w aufgespannten linearen Teilraum. Betrachten Sie die linearen Abbildungen σ_v und σ_w. Zeigen Sie:

(c) Der Teilraum U ist σ_v-invariant und σ_w-invariant, d.h. es gilt $\sigma_v(U) \subseteq U$ und $\sigma_w(U) \subseteq U$.

(d) Für alle $x \in U^\perp$ gilt $\sigma_v(x) = x = \sigma_w(x)$.

(e) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   i. Die Vektoren v und w sind linear abhängig oder orthogonal zueinander.

   ii. Die Abbildungen σ_v und σ_w kommutieren, d.h. $\sigma_v \circ \sigma_w = \sigma_w \circ \sigma_v$.