Lineare Algebra II
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
25./26. Mai 2011

Minitest

Aufgabe M1 (Skalarprodukt)
Es seien V ein euklidischer Vektorraum und $x, y, z \in V$. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x = y$
- ☐ $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ☐ $\langle x, y \rangle \geq 0$
- ☐ $\langle x, x \rangle \geq 0$
- ☐ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ☐ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- ☐ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
- ☐ $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Lösung: Die erste, dritte, neunte und zwölfte Behauptung sind falsch, alle anderen sind richtig.

Aufgabe M2 (Norm)
Es seien V ein euklidischer Vektorraum, $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ $\|x\| > 0$
- ☐ $\|0\| = 0$
- ☐ $\|1\| = 1$
- ☐ $\|x\| > 0 \; \forall \, x \neq 0$
- ☐ $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
- ☐ $\|\lambda x\| \geq \lambda \|x\|$
- ☐ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- ☐ $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$
- ☐ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Lösung: Die erste, dritte, fünfte und achte Behauptung sind falsch, alle anderen sind richtig.

Aufgabe M3 (Abstand)
Es seien V ein euklidischer Vektorraum, $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Abstand zwischen x und y ist definiert durch

$$d(x, y) := \|x - y\| \,.$$

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ $d(x,x) > 0$
- ☐ $d(x,x) = 0$
- ☐ $d(x,y) > 0 \; \forall\, x \neq y$
- ☐ $d(\lambda x, y) = \lambda d(x,y)$
- ☐ $d(x,y) = d(y,x)$
- ☐ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
- ☐ $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$

Lösung: Die erste, vierte und siebente Behauptung sind falsch, alle anderen sind richtig.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rang komplexer Matrizen)
Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix und $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ die Matrix mit denselben Einträgen wie A, aber aufgefasst als komplexe Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie dazu den Gauß-Algorithmus.

(b) Sei nun $m = n$ und λ ein reeller Eigenwert von B.
Zeigen Sie, dass λ auch ein Eigenwert von A ist und dass die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von λ bei beiden Matrizen übereinstimmen.

(c) Gilt die Aussage aus dem letzten Aufgabenteil auch noch, wenn man die Rollen von A und B vertauscht? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung:

(a) Man erkennt leicht dass sich die Anwendung des Gauß-Algorithmus auf die Matrizen A und B nicht unterscheidet. In beiden Fällen subtrahiert man reelle Vielfache einer Zeile von einer anderen Zeile um Nullen zu erzeugen. Es sind also auch bei der komplexen Matrix dieselben Operationen.
Da der Rang einer Matrix gleich der Anzahl der Zeilen ist, die am Ende des Gauß-Algorithmus nicht Null sind, gilt

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B\,.$$

(b) Da die Berechnung der Determinante unabhängig davon ist, ob man die Matrix als reelle oder komplexe Matrix betrachtet, stimmen die charakteristischen Polynome von A und B überein. D.h. λ ist als reelle Nullstelle von P_B auch Nullstelle von P_A, also ein Eigenwert von A.
Seien d_λ^A und d_λ^B die geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von A bzw. B. Dann gilt wegen dem letzten Aufgabenteil

$$d_\lambda^A = \dim(\ker(A - \lambda E)) = n - \operatorname{rank}\,(A - \lambda E) = n - \operatorname{rank}\,(B - \lambda E) = \dim(\ker(B - \lambda E)) = d_\lambda^B\,.$$

w.z.b.w.

(c) Die Aussage gilt auch noch, wenn man die Rollen von A und B vertauscht. Denn da das charakteristische Polynom von A und B gleich ist, ist jeder Eigenwert von A auch ein reeller Eigenwert von B und man kann die Aussage des letzten Aufgabenteils anwenden.

Aufgabe G2 (Skalarprodukt)
Zeigen Sie, dass

$$V := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ stetig }\}$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

einen unitären Vektorraum bildet.
Bestimmen Sie das Skalarprodukt von

$$f(t) = \cos t \text{ und } g(t) = \sin(t)\,.$$

Wie groß ist der Winkel γ zwischen f und g?

Lösung: Aus der Vorlesung zur linearen Algebra 1 ist bekannt, dass alle Funktionen auf der Menge $[0,2\pi]$ einen Vektorraum bilden. Da die Summe zweier stetiger Funktionen stetig ist, und auch das Produkt aus einer komplexen Zahl und einer stetigen Funktion stetig ist, bildet V einen Untervektorraum dieses Vektorraums.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt, denn für alle $f,g,h \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

- $$\langle f+h,g\rangle = \int_0^{2\pi}(f+h)(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}(f(t)+h(t))\overline{g(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_0^{2\pi} h(t)\overline{g(t)}\,dt = \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$$

  $$\langle \lambda f,g\rangle = \int_0^{2\pi}(\lambda f)(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \lambda\cdot f(t)\overline{g(t)}\,dt = \lambda\cdot\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \lambda\,\langle f,g\rangle$$

- $$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}\overline{\overline{f(t)}g(t)}\,dt = \overline{\int_0^{2\pi} g(t)\overline{f(t)}\,dt} = \overline{\langle g,f\rangle}$$

- $\langle f,f\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt \geq 0$, wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $f(t)=0\,\forall t\in[0,2\pi]$ ist. Es folgt also

  $$\langle f,f\rangle \geq 0 \text{ und } \langle f,f\rangle \Leftrightarrow f=0\,.$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \cos,\sin\rangle &= \int_0^{2\pi}\cos(t)\overline{\sin(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}\cos(t)\sin(t)\,dt = [\sin^2(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos(t)\sin(t)\,dt \\
&= [\sin^2(t)]_0^{2\pi} - \langle\cos,\sin\rangle \\
\Rightarrow \langle\cos,\sin\rangle &= \frac{1}{2}[\sin^2 t]_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

Damit gilt für den gesuchten Winkel γ

$$\cos\gamma = \frac{\operatorname{Re}\langle\sin,\cos\rangle}{\|\sin\|\cdot\|\cos\|} = 0\,.$$

D.h. der Winkel ist $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe G3 (Skalarprodukt)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$$

ein Skalarprodukt definiert.

(b) Auf

$$V = \{(x_1,x_2,\ldots)\,|\,x_i\in\mathbb{R}, x_i\neq 0 \text{ nur für endlich viele i}\}$$

wird durch

$$\langle (x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i$$

ein Skalarprodukt definiert.

(c) Auf $\mathbb{R}$ ist durch

$$\langle x,y\rangle = |x|$$

ein Skalarprodukt definiert.

(d) Auf $\mathbb{R}[t]$ wird durch

$$\left\langle a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m \right\rangle = \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} a_i b_i$$

ein Skalarprodukt definiert.

(e) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$\left\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \right\rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$$

ein Skalarprodukt definiert.

(f) Auf $M_n(\mathbb{R})$ wird durch

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\,(B^t A)$$

ein Skalarprodukt definiert.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch, denn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht positiv definit. Z.B. gilt

$$\langle (1,1), (1,1) \rangle = 1 - 1 = 0 \text{ aber } (1,1) \neq (0,0) = 0\,.$$

(b) Die Aussage ist richtig, denn für alle $(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots), (z_1, z_2, \ldots) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle (x_1, x_2, \ldots) + (z_1, z_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \right\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + z_i) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} z_i y_i \\
&= \left\langle (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \right\rangle + \left\langle (z_1, z_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \right\rangle \\
\left\langle \lambda (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \right\rangle &= \left\langle (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \\
&= \lambda \left\langle (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \right\rangle \\
\left\langle (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \right\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i = \left\langle (y_1, y_2, \ldots), (x_1, x_2, \ldots) \right\rangle \\
\left\langle (x_1, x_2, \ldots), (x_1, x_2, \ldots) \right\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq 0 \\
\left\langle (x_1, x_2, \ldots), (x_1, x_2, \ldots) \right\rangle = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots) = 0
\end{aligned}$$

(c) Die Aussage ist falsch, denn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht symmetrisch. Z.B. gilt

$$\langle 1, 0 \rangle = 1 \neq 0 = \langle 0, 1 \rangle\ .$$

(d) Die Aussage ist wahr, denn sie ist äquivalent zu der in Aufgabenteil (b). Dies ist der Fall, da durch

$$V \to \mathbb{R}[t], \qquad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \ldots$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen gegeben ist (Beachte, dass das Bild immer ein endl. Polynom ist, weil nur endlich viele der x_i ungleich Null sind).

Alternativ kann man auch dieselben Nachweise wie in Aufgabenteil (b) durchführen.

(e) Die Aussage ist falsch, denn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht bilinear. Z.B. gilt

$$\langle 2 \cdot (1,1), (1,1) \rangle = \langle (2,2), (1,1) \rangle = 4 + 4 = 8 \neq 4 = 2 \cdot (1+1) = 2 \left\langle (1,1), (1,1) \right\rangle\ .$$

(f) Die Aussage ist wahr, denn für alle $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt mit Hilfe der Eigenschaften der Spur

$$\begin{aligned}
\langle A + C, B \rangle &= \mathrm{tr}\,(B^T(A+C)) = \mathrm{tr}\,(B^T A + B^T C) = \mathrm{tr}\,(B^T A) + \mathrm{tr}\,(B^T C) = \langle A, B \rangle + \langle C, B \rangle \\
\langle \lambda \cdot A, B \rangle &= \mathrm{tr}\,(B^T(\lambda \cdot A)) = \mathrm{tr}\,(\lambda \cdot B^T A) = \lambda \cdot \mathrm{tr}\,(B^T A) = \lambda \cdot \langle A, B \rangle \\
\langle A, B \rangle &= \mathrm{tr}\,(B^T A) = \mathrm{tr}\,((B^T A)^T) = \mathrm{tr}\,(A^T (B^T)^T) = \mathrm{tr}\,(A^T B) = \langle B, A \rangle \\
\langle A, A \rangle &= \mathrm{tr}\,(A^T A) = a_1^T a_1 + a_2^T a_2 + \ldots + a_n^T a_n = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \ldots + \|a_n\|^2 \geq 0 \\
\langle A, A \rangle = 0 &\Leftrightarrow \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \ldots + \|a_n\|^2 = 0 \Leftrightarrow a_i = 0\, \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow A = 0\,.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet a_i die i-te Spalte von A und $\|\cdot\|$ die Standardnorm im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen)
Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit $\varphi^n = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ und $\varphi^k \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}\ \forall\, 1 \leq k < n$, für die es eine Basis B gibt, sodass $[\varphi]_B^B$ nur Nullen und Einsen als Einträge hat. Geben Sie eine solche Basis B und die zugehörige Matrix $[\varphi]_B^B$ an.

Lösung: Man wählt als Basis $B = E = \{e_1, \dots e_n\}$ die Standardbasis und als Abbildung $\varphi = \varphi_A$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Das ist gerade diejenige lineare Abbildung, für die

$$\varphi(e_1) = e_2,\ \varphi(e_2) = e_3,\ \dots,\ \varphi(e_{n-1}) = e_n,\ \varphi(e_n) = e_1$$

gilt. D.h. insbesondere ist für $1 \leq k < n$

$$\varphi^k(e_1) = e_{1+k} \neq e_1 \Rightarrow \varphi^k \neq \mathrm{id}\ .$$

Außerdem gilt

$$\varphi^n(e_i) = e_{(i+n) \bmod n} = e_i \Rightarrow \varphi^n = \varphi\ .$$

D.h. φ hat alle geforderten Eigenschaften und es gilt $B = E$ und $[\varphi]_B^B = A$.
Man kann anstelle von E auch eine beliebige andere Basis verwenden und φ analog durch eine zyklische Vertauschung der Basisvektoren definieren

Hausübung

Aufgabe H1 (Einsetzabbildung)
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix. Dann nennt man die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}[t] \to M_n(\mathbb{K}), \qquad p \mapsto p(A)$$

Einsetzabbildung.
Zeigen Sie, dass φ ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren ist.
Erinnerung: φ ist genau dann ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren, wenn φ ein Vektorraumhomomorphismus ist, für den zusätzlich

$$\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) \ \forall\, p, q \in \mathbb{K}[t]$$

gilt.

Lösung: Sei nun $p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, q = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m \in \mathbb{K}[t]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ beliebig. Außerdem setze ich $a_i = 0 \ \forall i > n$ und $b_j = 0 \ \forall j > m$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda p + \mu q) &= \left(\lambda(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) + \mu(b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m)\right)(A)\\
&= \left(\lambda a_0 + \mu b_0 + (\lambda a_1 + \mu b_1)t + \ldots + (\lambda a_{\max\{n,m\}} + \mu b_{\max\{n,m\}})t^{\max\{n,m\}}\right)(A)\\
&= \left(\lambda a_0 + \mu b_0\right) E + \left(\lambda a_1 + \mu b_1\right) A + \ldots + \left(\lambda a_{\max\{n,m\}} + \mu b_{\max\{n,m\}}\right) A^{\max\{n,m\}}\\
&= \lambda \left(a_0 E + a_1 A + \ldots + a_n A^n\right) + \mu \left(b_0 E + b_1 A + \ldots + b_m A^m\right) = \lambda p(A) + \mu q(A)\\
&= \lambda \varphi(p) + \mu \varphi(q)\\
\varphi(p \cdot q) &= \left((a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)(b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m)\right)(A)\\
&= \left(a_0 b_0 + \sum_0^1 a_i b_{1-i} t + \sum_0^2 a_i b_{2-i} t^2 + \ldots + \sum_0^{n+m} a_i b_{n+m-i} t^{n+m}\right)(A)\\
&= a_0 b_0 E + \sum_0^1 a_i b_{1-i} A + \sum_0^2 a_i b_{2-i} A^2 + \ldots + \sum_0^{n+m} a_i b_{n+m-i} A^{n+m}\\
&= \left(a_0 E + a_1 A + \ldots + a_n A^n\right) \cdot \left(b_0 E + b_1 A + \ldots + b_m A^m\right) = p(A) \cdot q(A)\\
&= \varphi(p) \cdot \varphi(q)\,.
\end{aligned}$$

w.z.b.w.

Aufgabe H2 (Orthogonalität)

(a) Es sei A eine reelle $m \times n$-Matrix.

Zeigen Sie, dass jedes Element $x \in \ker A$ senkrecht auf allen Zeilenvektoren der Matrix A steht (wir verwenden dabei das Standardskalarprodukt) und dass es keine weiteren Vektoren gibt, für die diese Aussage gilt.

(b) Gilt die Aussage des letzten Aufgabenteils noch, wenn man eine beliebige komplexe Matrix A betrachtet? Zeigen Sie ihre Behauptung.

Lösung:

(a) Es bezeichne a_i den i-ten Zeilenvektor. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{Die } i\text{-te Spalte von } Ax \text{ ist Null} \Leftrightarrow a_i^T x = 0 \Leftrightarrow \langle a_i, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x \text{ steht senkrecht auf } a_i\,.$$

Daraus folgt sofort, dass

$$x \in \ker A \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \text{ steht senkrecht auf allen Zeilenvektoren von } A$$

gilt.

w.z.b.w.

(b) Für eine kompexe Matrix muss man dann auch das komplexe Standardskalarprodukt nehmen und die Aussage gilt im Allgemeinen nicht mehr.

Ein mögliches Gegenbeispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A,$$

denn dann gilt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -2i \neq 0\,.$$

Aufgabe H3 (ähnliche Matrizen)
Es sei $A \in M_3(\mathbb{C})$ eine Nilpotente Matrix.

(a) Es sei $A^3 = 0$ und $A^2 \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

- Zeigen Sie, es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{C}^3$, sodass v, Av und $A^2 v$ ungleich Null sind.
- Zeigen Sie, dass für dieses v die Vektoren $v, Av, A^2 v$ linear unabhängig sind und eine Basis von $\mathbb{C}^3$ bilden.
- Stellen Sie die Abbildung φ_A in einer Basis $\widetilde{B}$ dar, welche aus B durch vertauschen der Vektoren entsteht.

(b) Es sei $A^2 = 0$ und $A \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Hinweis: Zeigen Sie die Existenz einer geeignete Basis B von $\mathbb{C}^3$ bezüglich der die Matrix A die angegebene Gestalt hat. Diese Basis sollte die Form $B = \{Av, v, w\}$ mit $Av, w \in \ker A$ haben.

(c) Es seien B und C beliebige Matrizen aus $M_3(\mathbb{C})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Ausssagen

(i) $B \approx C$

(ii) $B - \lambda_1 E \approx C - \lambda_1 E$ für ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}$

(iii) $B - \lambda E \approx C - \lambda E$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

(d) Zeigen Sie, dass alle Matrizen aus $M_n(\mathbb{C})$ mit $n \leq 3$ durch ihr charakteristisches Polynom und ihr Minimalpolynom bis auf Ähnlichkeit eindeutig festgelegt sind.

Lösung:

(a)
- Da $A^2 \neq 0$ gilt, existiert ein $v \in \mathbb{C}^3$ mit $A^2 v \neq 0$. Daraus folgt, dass auch v und Av nicht Null sind.
- Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot Av + \lambda_3 \cdot A^2 v = 0\,. \tag{1}$$

Wendet man auf (1) A einmal bzw. zweimal an und beachtet, dass $A^3 = A^4 = 0$ gilt, so erhält man

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot Av + \lambda_2 \cdot A^2 v &= 0 \quad \text{und} && (2) \\ \lambda_1 \cdot A^2 v &= 0\,. && (3) \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (3) folgt wegen $A^2 v \neq 0$, dass $\lambda_1 = 0$ gilt. Daraus und aus der Gleichung (2) folgt, dass $\lambda_2 = 0$ gilt. Daraus und aus der Gleichung (1) folgt, dass $\lambda_3 = 0$ gilt. Es ist also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

D.h. die Vektoren $v, Av, A^2 v$ sind linear unabhängig und bilden wegen $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$.

- Betrachtet man nun die Basis $\widetilde{B} = \{A^2 v, Av, v\}$, so gilt

$$[\varphi_A]_{\widetilde{B}}^{\widetilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

  D.h. A ist ähnlich zu dieser Matrix.

(b) Da A nilpotent ist, hat A einen nichttrivialen Kern. D.h. es gilt $\dim(\ker A) \geq 1$.

Angenommen es wäre $\dim(\ker A) = 1$. Dann ist $\dim(\mathrm{im}\, A) = 3 - 1 = 2$. D.h. es gibt ein Element $u \in \mathbb{C}^3$, dass im Bild von A liegt, aber nicht im Kern von A. D.h. es gibt ein $\overline{u} \in \mathbb{C}^3$ mit $A\overline{u} = u$ und $A^2\overline{u} = Au \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $A^2 = 0$.

Wegen $A \neq 0$ ist $\dim(\ker A) \neq 3$, es gilt also

$$\dim(\ker A) = 2 .$$

Wegen $A \neq 0$ gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{C}^3$ mit $Av \neq 0$. Da $A^2 = 0$ ist, gilt dann $Av \in \ker A$. Wegen $\dim(\ker A) = 2$ gibt es einen Vektor $w \in \mathbb{C}^3$, so dass $\{Av, w\}$ eine Basis von $\ker A$ bildet.

Seien nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda_1 Av + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 . \tag{4}$$

Multipliziert man (4) mit A und beachtet, dass $Av, w \in \ker A$ gilt, so ergibt sich

$$\lambda_2 Av = 0 . \tag{5}$$

Daraus folgt wegen $Av \neq 0$, dass $\lambda_2 = 0$ gilt. Daraus folgt wegen (4) und der Tatsache, dass $\{Av, w\}$ eine Basis von $\ker A$ bilden, dass auch $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ gilt.

D.h. $B := \{Av, v, w\}$ ist eine Basis des $\mathbb{C}^3$. Wegen $A(Av) = Aw = 0$ folgt

$$[\varphi_A]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

D.h. A ist ähnlich zu dieser Matrix.

(c)
- Aus (i) folgt (ii) sofort (mit $\lambda_1 = 0$).
- Angenommen es gilt (ii), d.h. es gibt ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ mit $B - \lambda_1 E \approx C - \lambda_1 E$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in M_n(\mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}(B - \lambda_1 E)S = C - \lambda_1 E .$$

  Daraus folgt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S^{-1}(B - \lambda E)S &= S^{-1}BS - \lambda E + \lambda_1 E - \lambda_1 E = S^{-1}(B - \lambda_1 E)S - \lambda E + \lambda_1 E = C - \lambda_1 E - \lambda E + \lambda_1 E \\ &= C - \lambda E . \end{aligned}$$

  D.h. $B - \lambda E \approx C - \lambda E$, also gilt (iii).
- Aus (iii) folgt (i) sofort, indem man $\lambda = 0$ setzt.

(d) Da der Grad des charakteristischen Polynoms gleich n ist, kann man die Aussage für verschiedene n getrennt beweisen.

Für $n = 1$ ist die Aussage klar.

Für $n = 2$ wurde die Aussage bereits in Aufgabe G3 vom Übungsblatt 6 gezeigt.

Es beibt also nur noch der Fall $n = 3$ zu betrachten. Diesen unterteile ich in die 2 Fälle, dass A nur einen Eigenwert hat und das A mehr als einen Eigenwert hat. Da Matrizen mit demselben Minimalpolynom auch dieselben Eigenwerte haben, reicht es die Aussage für die beiden Fälle einzeln zu zeigen.

- 1. Fall: A hat nur einen Eigenwert λ.

  Da jede Matrix Triagonalisierbar ist, gibt es eine obere Dreiecksmatrix B, die zu A ähnlich ist. Da B dann auch nur den Eigenwert λ hat, ist $B - \lambda E$ eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonalen. D.h. $B - \lambda E$ ist Nilpotent. Wegen der Aufgabe G2 vom Übungsblatt 6 gilt dann $(B - \lambda E)^3 = 0$, d.h. $B - \lambda E$ ist entweder Null oder eine Matrix wie in Aufgabenteil (a) oder (b).

  Insbesondere ist $B - \lambda E$ ähnlich zu

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Wegen Aufgabenteil (c) ist also B und damit auch A ähnlich zu

  $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

  Mithilfe von Aufgabe H1 vom Übungsblatt 6 folgt sofort, dass die zugehörigen Minimalpolynome

  $$(\lambda - t), (\lambda - t)^3 \text{ bzw. } (\lambda - t)^2$$

  sind. Da diese also für alle möglichen Ähnlichkeitsklassen verschieden sind, folgt die Aussage im ersten Fall.

- 2. Fall: A hat mindestens zwei verschiedene Eigenwerte.

  Dann gibt es eine Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit eins. D.h. A ist ähnlich zu einer Matrix der Gestalt $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit einer komplexen 2×2-Matrix C, deren Eigenwerte ungleich λ sind. Mit Hilfe der Aufgabe H1 vom Übungsblatt 6 folgt daraus, dass

  $$M_B(t) = (\lambda - t) M_C(t) \text{ und } P_B(t) = (\lambda - t) P_C(t)$$

  gilt.

  Hätten zwei nicht ähnliche Matrizen B und $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \widetilde{C} \end{pmatrix}$ dasselbe Minimalpolynom und dasselbe charakteristische Polynom, so würde $\mu = \lambda$ gelten und die nicht ähnlichen 2×2-Matrizen C und $\widetilde{C}$ hätten dasselbe Minimalpolynom und dasselbe charakteristische Polynom. Dies ist nicht möglich, da die zu zeigende Aussage für 2×2-Matrizen gilt.

  D.h. in diesem Fall sind die Ähnlichkeitsklassen durch das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom eindeutig festgelegt.

w.z.b.w.