Lineare Algebra II
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
25./26. Mai 2011

Minitest

Aufgabe M1 (Skalarprodukt)
Es seien V ein euklidischer Vektorraum und $x, y, z \in V$. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x = y$
- ☐ $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ☐ $\langle x, y \rangle \geq 0$
- ☐ $\langle x, x \rangle \geq 0$
- ☐ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ☐ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- ☐ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
- ☐ $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- ☐ $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Aufgabe M2 (Norm)
Es seien V ein euklidischer Vektorraum, $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ $\|x\| > 0$
- ☐ $\|0\| = 0$
- ☐ $\|1\| = 1$
- ☐ $\|x\| > 0 \; \forall \, x \neq 0$
- ☐ $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
- ☐ $\|\lambda x\| \geq \lambda \|x\|$
- ☐ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- ☐ $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$
- ☐ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Aufgabe M3 (Abstand)
Es seien V ein euklidischer Vektorraum, $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Abstand zwischen x und y ist definiert durch

$$d(x, y) := \|x - y\| .$$

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ $d(x, x) > 0$

- ☐ $d(x,x)=0$
- ☐ $d(x,y)>0\ \forall\, x\neq y$
- ☐ $d(\lambda x,y)=\lambda d(x,y)$
- ☐ $d(x,y)=d(y,x)$
- ☐ $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$
- ☐ $d(x,z)=d(x,y)+d(y,z)$

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rang komplexer Matrizen)
Es sei $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix und $B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ die Matrix mit denselben Einträgen wie A, aber aufgefasst als komplexe Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} B$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie dazu den Gauß-Algorithmus.

(b) Sei nun $m=n$ und λ ein reeller Eigenwert von B.
Zeigen Sie, dass λ auch ein Eigenwert von A ist und dass die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von λ bei beiden Matrizen übereinstimmen.

(c) Gilt die Aussage aus dem letzten Aufgabenteil auch noch, wenn man die Rollen von A und B vertauscht? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe G2 (Skalarprodukt)
Zeigen Sie, dass

$$V:=\{f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}\,|\,f \text{ stetig }\}$$

mit

$$\langle f,g\rangle:=\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

einen unitären Vektorraum bildet.
Bestimmen Sie das Skalarprodukt von

$$f(t)=\cos t \text{ und } g(t)=\sin(t)\,.$$

Wie groß ist der Winkel γ zwischen f und g?

Aufgabe G3 (Skalarprodukt)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1y_1-x_2y_2$$

ein Skalarprodukt definiert.

(b) Auf

$$V=\{(x_1,x_2,\ldots)\,|\,x_i\in\mathbb{R},x_i\neq 0 \text{ nur für endlich viele i}\}$$

wird durch

$$\langle(x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots)\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i$$

ein Skalarprodukt definiert.

(c) Auf $\mathbb{R}$ ist durch

$$\langle x,y\rangle=|x|$$

ein Skalarprodukt definiert.

(d) Auf $\mathbb{R}[t]$ wird durch

$$\left\langle a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m \right\rangle = \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} a_i b_i$$

ein Skalarprodukt definiert.

(e) Auf $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$\left\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \right\rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$$

ein Skalarprodukt definiert.

(f) Auf $M_n(\mathbb{R})$ wird durch

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\,(B^t A)$$

ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen)
Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit $\varphi^n = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ und $\varphi^k \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ $\forall\, 1 \leq k < n$, für die es eine Basis B gibt, sodass $[\varphi]_B^B$ nur Nullen und Einsen als Einträge hat. Geben Sie eine solche Basis B und die zugehörige Matrix $[\varphi]_B^B$ an.

Hausübung

Aufgabe H1 (Einsetzabbildung)
Es sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix. Dann nennt man die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}[t] \to M_n(\mathbb{K}), \qquad p \mapsto p(A)$$

Einsetzabbildung.
Zeigen Sie, dass φ ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren ist.
Erinnerung: φ ist genau dann ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren, wenn φ ein Vektorraumhomomorphismus ist, für den zusätzlich

$$\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) \ \forall\, p, q \in \mathbb{K}[t]$$

gilt.

Aufgabe H2 (Orthogonalität)

(a) Es sei A eine reelle $m \times n$-Matrix.
Zeigen Sie, dass jedes Element $x \in \ker A$ senkrecht auf allen Zeilenvektoren der Matrix A steht (wir verwenden dabei das Standardskalarprodukt) und dass es keine weiteren Vektoren gibt, für die diese Aussage gilt.

(b) Gilt die Aussage des letzten Aufgabenteils noch, wenn man eine beliebige komplexe Matrix A betrachtet? Zeigen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe H3 (ähnliche Matrizen)
Es sei $A \in M_3(\mathbb{C})$ eine Nilpotente Matrix.

(a) Es sei $A^3 = 0$ und $A^2 \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.
Gehen Sie dazu wie folgt vor.
- Zeigen Sie, es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{C}^3$, sodass v, Av und $A^2 v$ ungleich Null sind.
- Zeigen Sie, dass für dieses v die Vektoren $v, Av, A^2 v$ linear unabhängig sind und eine Basis von $\mathbb{C}^3$ bilden.
- Stellen Sie die Abbildung φ_A in einer Basis $\widetilde{B}$ dar, welche aus B durch vertauschen der Vektoren entsteht.

(b) Es sei $A^2 = 0$ und $A \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.
Hinweis: Zeigen Sie die Existenz einer geeignete Basis B von $\mathbb{C}^3$ bezüglich der die Matrix A die angegebene Gestalt hat. Diese Basis sollte die Form $B = \{Av, v, w\}$ mit $Av, w \in \ker A$ haben.

(c) Es seien B und C beliebige Matrizen aus $M_3(\mathbb{C})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Ausssagen
  (i) $B \approx C$
  (ii) $B - \lambda_1 E \approx C - \lambda_1 E$ für ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}$
  (iii) $B - \lambda E \approx C - \lambda E$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

(d) Zeigen Sie, dass alle Matrizen aus $M_n(\mathbb{C})$ mit $n \leq 3$ durch ihr charakteristisches Polynom und ihr Minimalpolynom bis auf Ähnlichkeit eindeutig festgelegt sind.