Lineare Algebra II
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
18./19. Mai 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minimalpolynom)
Bestimmen Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Das charakteristische Polynom

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ -2 & -t \end{pmatrix} = -t(1-t) + 6 = t^2 - t + 6$$

hat die zwei verschiedenen komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 6}\,.$$

Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt und beide Polynome dieselben Nullstellen haben, folgt daraus bereits, dass das Minimalpolynom von A gleich dem charakteristischen Polynom von A ist. Es gilt also

$$M_A(t) = t^2 - t + 6\,.$$

Das charakteristische Polynom von B ist

$$P_B(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-t \end{pmatrix} = (2-t)^2\left((1-t)(4-t)+2\right) = (2-t)^2(t^2-5t+6) = (t-2)^3(t-3)\,.$$

Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt und beide Polynome dieselben Nullstellen haben, muss also das Minimalpolynom die Gestalt $(t-2)^k(t-3)$ mit $1 \le k \le 3$ haben. Gesucht ist also das kleinste k, sodann B eine Nullstelle von $(t-2)^k(t-3)$ ist. Man rechnet leicht nach, dass $(B-2E)(B-3E) \neq 0$, aber $(B-2E)^2(B-3E) = 0$ gilt. Somit ist

$$M_B(t) = (t-2)^2(t-3)$$

das Minimalpolynom von B.

Aufgabe G2 (Linearkombinationen der Potenzen einer Matrix)

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix mit Einträgen aus einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$.

Schreiben Sie A^2 als Linearkombination von A und E.

(b) Sei nun A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Wie groß ist dann die Dimension des von den Potenzen $E, A, A^2, \ldots$ aufgespannte linearen Teilraums von $M_n(\mathbb{K})$? Zeigen Sie Ihre Aussage.
Hinweis: Bringen Sie die gesuchte Dimension mit einem Merkmal des Minimalpolynoms von A in Verbindung.

(c) Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass dann $A^n = 0$ gilt (mit demselben n).

Lösung:

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das charakteristische Polynom von A die Gestalt

$$P_A(t) = t^2 - t \cdot \operatorname{tr} A + \det A = t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

hat. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $P_A(A) = 0$, also

$$0 = A^2 - A \cdot \operatorname{tr} A + E \cdot \det A \Longrightarrow A^2 = A \cdot \operatorname{tr} A - E \cdot \det A = (a+d) \cdot A - (ad - cb) \cdot E\,.$$

(b) Die gesuchte Dimension ist gleich dem Grad des Minimalpolynoms M_A.
Dazu zeigt man zunächst: Wenn $E, A, A^2, \ldots, A^k$ linear abhängig sind und $E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$ linear unabhängig sind, dann ist die gesuchte Dimension gleich k.

- Beweis:
  Die Voraussetzungen bedeuten gerade, dass es $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_k \neq 0$ und

  $$0 = \lambda_0 E + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_k A^k$$

  gibt. Daraus folgt

  $$A^k = \frac{\lambda_0}{\lambda_k} E + \frac{\lambda_1}{\lambda_k} A + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} A^{k-1}\,.$$

  D.h. A^k ist eine Linearkombination von $E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$. Multipliziert man die letzte Gleichung mit A und setzt dann auf der rechten Seite für A^k diese Linearkombination ein, so erhält man, dass A^{k+1} eine Linearkombination von $E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$ ist. Wiederholt man dieses Argument, so ergibt sich:
  Alle erzeugenden $E, A, A^2, \ldots$ des betrachteten Raumes sind eine Linearkombination der linear unabhängigen Elemente $E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$. D.h. die gesuchte Dimension ist gleich k.

Sei nun $M_A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$ vom Grad k. Dann ist

$$0 = M_A(A) = a_0 + a_1 A + \ldots + a_k A^k\,,$$

also sind die Elemente $E, A, A^2, \ldots, A^k$ linear abhängig.
Angenommen auch $E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$ wären linear abhängig. Dann gibt es $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{K}$, die nicht alle Null sind, und für die

$$0 = \lambda_0 E + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_{k-1} A^{k-1}$$

gilt. D.h. $P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_{k-1} t^{k-1}$ ist ein Polynom ungleich Null mit $P(A) = 0$. D.h. M_A teilt P. Dies ist aber unmöglich, da der Grad von P kleiner ist als der von M_A.
D.h. $E, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$ sind linear unabhängig.
Es folgt also, dass die gesuchte Dimension

$$k = \deg M_A$$

ist.

w.z.b.w.

(c) Wegen $A^k = 0$ ist das Minimalpolynom ein Teiler von t^k, also von der Form $M_A(t) = t^d$ für ein $d \leq k$. Außerdem ist das Minimalpolynom ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Insbesondere hat es höchstens Grad n. Somit gilt $A^d = 0$ für ein $d \leq n$ und damit auch $A^n = 0$.

Aufgabe G3 (Ähnlichkeitsklassen von 2×2-Matrizen)
Bestimmen Sie alle Ähnlichkeitsklassen von 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Geben Sie zu jeder Ähnlichkeitsklasse genau einen Repräsentanten an.
Gehen Sie dazu wie folgt vor.
Es sei A eine komplexe 2×2-Matrix.

(i) Zeigen Sie: Wenn A zwei verschiedene Eigenwerte λ und μ hat, dann ist A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie: Wenn A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 2 hat, dann ist A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(iii) Zeigen Sie: Wenn A nur den Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 1 hat, dann ist A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass die Ähnlichkeitsklasse einer komplexen 2×2-Matrix durch ihr Minimalpolynom und ihr charakteristisches Polynom eindeutig bestimmt ist.

Lösung: Es sei $E = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^2$.

(i) In diesem Fall gibt es einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ und einen Eigenvektor v_2 zum Eigenwert μ. Da es verschiedene Eigenwerte sind, sind v_1 und v_2 linear unabhängig, bilden also wegen $\dim \mathbb{C}^2 = 2$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$. D.h. mit $B = \{v_1, v_2\}$ und der Matrix $S = (v_1 \mid v_2)$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = [f_A]_B^B = [id]_B^E [f_A]_E^E [id]_E^B = S^{-1}AS\,.$$

Dies zeigt die geforderte Ähnlichkeit.

(ii) In diesem Fall ist der Eigenraum zum Eigenwert λ zweidimensional, also der gesamte $\mathbb{C}^2$. D.h. die Matrix A ist gleich

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(iii) In diesem Fall gibt es einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ. Nun ergänzt man v_1 durch einen zweiten Vektor w zu einer Basis von $\mathbb{C}^2$. Es gilt dann $Aw = \mu_1 v_1 + \mu_2 w$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$. Da die geometrische Vielfachheit von λ gleich 1 ist, ist w kein Eigenvektor von A, also muss $\mu_1 \neq 0$ gelten. Nun setzt man $v_2 = \frac{1}{\mu_1} w$. Dann bilden v_1 und v_2 immer noch eine Basis von $\mathbb{C}^2$ und es gilt

$$Av_2 = \frac{1}{\mu_1}(Aw) = v_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} w = v_1 + \mu_2 v_2\,.$$

D.h. mit $B = \{v_1, v_2\}$ und der Matrix $S = (v_1 \mid v_2)$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = [f_A]_B^B = [id]_B^E [f_A]_E^E [id]_E^B = S^{-1}AS\,.$$

Da ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte haben und A nur den Eigenwert λ hat, folgt $\mu_2 = \lambda$ und damit auch die geforderte Ähnlichkeit.

Aus den Aussagen (i)-(iii) folgt, dass es die folgenden Ähnlichkeitklassen gibt.

- Für je zwei verschiedene komplexe Zahlen λ und μ gibt es eine Ähnlichkeitsklasse $B_{\lambda,\mu}$, die aus allen Matrizen besteht, die λ und μ als Eigenwerte haben. Ein Repräsentant dieser Ähnlichkeitsklasse ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

- Für eine komplexe Zahl λ gibt es eine Ähnlichkeitsklasse B_λ, die aus allen Matrizen besteht, die nur den Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 2 haben. Der einzige Repräsentant dieser Ähnlichkeitsklasse ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Für eine komplexe Zahl λ gibt es eine Ähnlichkeitsklasse C_λ, die aus allen Matrizen besteht, die nur den Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 1 haben. Ein Repräsentant dieser Ähnlichkeitsklasse ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Da jede mögliche Konstellation von Eigenwerten eindeutig einer diese Äquivalenzklassen zugeordnet wird, sind dies alle Äquivalenzklassen.
Da das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von ähnlichen Matrizen gleich ist, muss man um zu zeigen, dass die Ähnlichkeitsklasse durch die beiden Polynome eindeutig bestimmt ist nur die Polynome von einem Repräsentanten aller Ähnlichkeitsklassen berechnen und feststellen, dass die bei verschiedenen Klassen verschieden sind.

- Für $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ist offensichtlich $P_A(t) = M_A(t) = (t-\lambda)(t-\mu)$.
- Für $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ist offensichtlich $P_A(t) = (t-\lambda)^2$ und $M_A = t - \lambda$.
- Für $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ist offensichtlich $P_A(t) = M_A(t) = (t-\lambda)^2$.

Da also keine zwei Ähnlichkeitsklassen dasselbe Minimalpolynom und dasselbe charakteristische Polynom haben, ist alles gezeigt, was in der Aufgabe verlangt ist.

Aufgabe G4 (Ableitung)
Es sei wieder $D : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t], a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \mapsto n a_n t^{n-1} + \cdots + a_1$ die Ableitung von Polynomen.
Zeigen Sie, dass es kein von Null verschiedenes Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ gibt mit

$$p(D) = 0 .$$

Lösung: Angenommen es gibt ein Polynom

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

aus $\mathbb{K}[t]$ mit $a_n \neq 0$ und $p(D) = 0$.
Dann muss auch $p(D)(t^{n+1}) = 0$ gelten. D.h. es ist

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 id + a_1 D + \ldots + a_n D^n)(t^{n+1}) = a_0 id(t^{n+1}) + a_1 D(t^{n+1}) + \ldots + a_n D^n(t^{n+1}) \\ &= a_0 t^{n+1} + a_1 (n+1) t^n + \ldots + a_n (n+1)! t . \end{aligned}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht das Nullpolynom, auf der rechten Seite ein Polynom, dessen Koeffizient vor t gleich $a_n(n+1)! \neq 0$ ist. Dies ist nicht möglich.
D.h. es gibt kein solches Polynom p.

w.z.b.w.

Hausübung

Aufgabe H1 (Minimalpolynom)

(a) Es seine A und B quadratische Matrizen und

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} .$$

Wie hängt das Minimalpolynom von C mit den Minimalpolynomen von A und B zusammen? Zeigen Sie ihre Behauptung.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Minimalpolynome der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} .$$

Dabei seien λ und μ beliebige reelle Zahlen.

Hinweis: Für zwei Polynome p und q ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(p,q)$ definiert als das Polynom mit Leitkoeffizient 1, welches von p und q geteilt wird und für das gilt:

für jedes Polynom s, welches von p und q geteilt wird, gilt: $\mathrm{kgV}(p,q)$ teilt s .

Lösung:

(a) Es gilt

$$M_C = \mathrm{kgV}(M_A, M_B) .$$

Um das zu beweisen, muss man zeigen, dass $\mathrm{kgV}(M_A, M_B)(C) = 0$ ist, und dass es kein Polynom s mit $\deg s < \deg \mathrm{kgV}(M_A, M_B)$ und $s(C) = 0$ gibt.

- Es gilt

$$\mathrm{kgV}(M_A, M_B)(C) = \mathrm{kgV}(M_A, M_B)\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{kgV}(M_A, M_B)(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{kgV}(M_A, M_B)(B) \end{pmatrix} .$$

Da M_A das Polynom $\mathrm{kgV}(M_A, M_B)$ teil und $M_A(A) = 0$ gilt, folgt $\mathrm{kgV}(M_A, M_B)(A) = 0$.
Da M_B das Polynom $\mathrm{kgV}(M_A, M_B)$ teil und $M_B(B) = 0$ gilt, folgt $\mathrm{kgV}(M_A, M_B)(B) = 0$.
Insgesamt ergibt sich also

$$\mathrm{kgV}(M_A, M_B)(C) = 0 .$$

- Angenommen es gibt ein Polynom s mit $\deg s < \deg \mathrm{kgV}(M_A, M_B)$ und $s(C) = 0$. Wegen der Struktur von C gilt

$$0 = s(C) = \begin{pmatrix} s(A) & 0 \\ 0 & s(B) \end{pmatrix} .$$

Insbesondere ist also $s(A) = s(B) = 0$. D.h. M_A teilt s und M_B teilt s, also teilt auch $\mathrm{kgV}(M_A, M_B)$ das Polynom s. Dies ist ein Widerspruch zu $\deg s < \deg \mathrm{kgV}(M_A, M_B)$.
D.h. es gibt kein solches Polynom s.

w.z.b.w.

(b) Aus Aufgabenteil (a) und Aufgabe T2 vom Tutorium 5 folgt sofort

$$\begin{aligned} M_{A_1}(t) &= \mathrm{kgV}\left((t-\lambda)^2, (t-\lambda)^2\right) = (t-\lambda)^2, \\ M_{A_2}(t) &= \mathrm{kgV}\left((t-\lambda)^3, t-\mu\right) = (t-\lambda)^3(t-\mu) \text{ und} \\ M_{A_3}(t) &= \mathrm{kgV}\left(\mathrm{kgV}((t-\lambda)^2, (t-\lambda)), \mathrm{kgV}((t-\mu)^2, (t-\mu))\right) = \mathrm{kgV}\left((t-\lambda)^2, (t-\mu)^2\right) = (t-\lambda)^2(t-\mu)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Projektionen)
Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) f ist eine Projektion (d.h. es gilt $f^2 = f$).

(ii) Es gibt Unterräume U_1 und U_2 von V mit

$$V = U_1 \oplus U_2, \quad f(u_1) = 0 \; \forall \, u_1 \in U_1 \text{ und } f(u_2) = u_2 \forall u_2 \in U_2 \,.$$

(iii) Das Minimalpolynom M_f teilt $t(1-t)$.

Dabei sei das Minimalpolynom einer linearen Abbildung wie üblich als das Minimalpolynom der zugehörigen Matrix definiert, d.h. es gilt $M_f = M_{[f]_B^B}$ mit einer beliebigen Basis B von V. Sie dürfen in dieser Aufgabe davon ausgegehen, dass das Minimalpolynom von Endomorphismen dieselben Eigenschaften hat, wie das von Matrizen.

Lösung:
(i) $\Longrightarrow$ (ii):
Angenommen es gilt (i). Setze

$$U_1 := \ker f \text{ und } U_2 := \operatorname{im} f \,.$$

Dann gilt für jedes $u_1 \in U_1$ offensichtlich $f(u_1) = 0$. Und für jedes $u_2 \in U_2$ existiert ein $w \in V$ mit $f(w) = u_2$, woraus

$$f(u_2) = f^2(w) = f(w) = u_2$$

folgt.
Sei nun $v \in V$ beliebig. Setze $u_2 := f(v)$ und $u_1 := v - u_2$. Dann gilt

$$f(u_1) = f(v - u_2) = f(v) - f(u_2) = f(v) - f^2(v) = f(v) - f(v) = 0 \,.$$

D.h. es ist

$$v = u_1 + u_2 \text{ mit } u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2 \,.$$

Also gilt

$$V = U_1 + U_2 \,.$$

Sei nun $w \in U_1 \cap U_2$. Dann existiert ein $w_1 \in V$ mit $f(w_1) = w$ und es gilt $f(w) = 0$. Daraus ergibt sich

$$w = f(w_1) = f^2(w_1) = f(w) = 0 \,,$$

also gilt

$$U_1 \cap U_2 = \{0\} \,.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$V = U_1 \oplus U_2 \,.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i):
Angenommen es gilt (ii). Dann gibt es für jedes $v \in V$ eindeutig bestimmte Elemente $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit

$$V = u_1 + u_2 \,.$$

D.h. es gilt

$$\begin{aligned} f(v) &= f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + u_2 = u_2 \text{ und} \\ f^2(v) &= f(f(v)) = f(u_2) = u_2 = f(v) \,. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$f = f^2 \,.$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii): Es gilt

$$f^2 = f \Leftrightarrow -f^2 + f = 0 \Leftrightarrow f(id - f) = 0 \Leftrightarrow f \text{ ist Nullstelle des Polynoms } t(1-t) \Leftrightarrow M_f \text{ teilt } t(1-t) \,.$$

Die letzte Äquivalenz ist wahr, da M_f jedes Polynom teilt, dass f als Nullstelle hat und da f eine Nullstelle von M_f ist (und das dann auch für alle Vielfachen von M_f gilt).

Aufgabe H3 (Invariante Eigenräume)
Es seien $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie: Die Eigenräume von f^n sind f-invariant.

(b) Es gelte

$$f \circ g = g \circ f \,.$$

Zeigen Sie: Die Eigenräume von g sind f-invariant.

Hinweis: Ein Untervektorraum U von V heißt f-invariant, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt.

Lösung:

(a) Sei U_λ der Eigenraum von f^n zu einem Eigenwert λ, dann gilt für alle $v \in U_\lambda$

$$f^n(v) = \lambda v \Longrightarrow f^n(f(v)) = f^{n+1}(v) = f(f^n(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \,.$$

Also ist auch $f(v) \in U_\lambda$.
Daraus folgt

$$f(U_\lambda) \subseteq U_\lambda \,.$$

w.z.b.w.

(b) Sei U_λ der Eigenraum von g zu einem Eigenwert λ, dann gilt für alle $v \in U_\lambda$

$$g(v) = \lambda v \Longrightarrow \lambda f(v) = f(\lambda v) = f(g(v)) = g(f(v)) \,.$$

Also ist auch $f(v) \in U_\lambda$.
Daraus folgt

$$f(U_\lambda) \subseteq U_\lambda \,.$$

w.z.b.w.