Lineare Algebra II
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
18./19. Mai 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minimalpolynom)
Bestimmen Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2 (Linearkombinationen der Potenzen einer Matrix)

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix mit Einträgen aus einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$.
Schreiben Sie A^2 als Linearkombination von A und E.

(b) Sei nun A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Wie groß ist dann die Dimension des von den Potenzen $E, A, A^2, \dots$ aufgespannte linearen Teilraums von $M_n(\mathbb{K})$? Zeigen Sie Ihre Aussage.
Hinweis: Bringen Sie die gesuchte Dimension mit einem Merkmal des Minimalpolynoms von A in Verbindung.

(c) Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass dann $A^n = 0$ gilt (mit demselben n).

Aufgabe G3 (Ähnlichkeitsklassen von 2×2-Matrizen)
Bestimmen Sie alle Ähnlichkeitsklassen von 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Geben Sie zu jeder Ähnlichkeitsklasse genau einen Repräsentanten an.
Gehen Sie dazu wie folgt vor.
Es sei A eine komplexe 2×2-Matrix.

(i) Zeigen Sie: Wenn A zwei verschiedene Eigenwerte λ und μ hat, dann ist A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie: Wenn A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 2 hat, dann ist A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(iii) Zeigen Sie: Wenn A nur den Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 1 hat, dann ist A ähnlich zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass die Ähnlichkeitsklasse einer komplexen 2×2-Matrix durch ihr Minimalpolynom und ihr charakteristisches Polynom eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe G4 (Ableitung)
Es sei wieder $D : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t], a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \mapsto n a_n t^{n-1} + \cdots + a_1$ die Ableitung von Polynomen.
Zeigen Sie, dass es kein von Null verschiedenes Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ gibt mit

$$p(D) = 0.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Minimalpolynom)

(a) Es seine A und B quadratische Matrizen und

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Wie hängt das Minimalpolynom von C mit den Minimalpolynomen von A und B zusammen? Zeigen Sie ihre Behauptung.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Minimalpolynome der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dabei seien λ und μ beliebige reelle Zahlen.

Hinweis: Für zwei Polynome p und q ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(p,q)$ definiert als das Polynom mit Leitkoeffizient 1, welches von p und q geteilt wird und für das gilt:

für jedes Polynom s, welches von p und q geteilt wird, gilt: $\mathrm{kgV}(p,q)$ teilt s.

Aufgabe H2 (Projektionen)

Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) f ist eine Projektion (d.h. es gilt $f^2 = f$).

(ii) Es gibt Unterräume U_1 und U_2 von V mit

$$V = U_1 \oplus U_2, \quad f(u_1) = 0 \;\forall\, u_1 \in U_1 \text{ und } f(u_2) = u_2 \forall u_2 \in U_2 .$$

(iii) Das Minimalpolynom M_f teilt $t(1-t)$.

Dabei sei das Minimalpolynom einer linearen Abbildung wie üblich als das Minimalpolynom der zugehörigen Matrix definiert, d.h. es gilt $M_f = M_{[f]_B^B}$ mit einer beliebigen Basis B von V. Sie dürfen in dieser Aufgabe davon ausgegehen, dass das Minimalpolynom von Endomorphismen dieselben Eigenschaften hat, wie das von Matrizen.

Aufgabe H3 (Invariante Eigenräume)

Es seien $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen.

(a) Zeigen Sie: Die Eigenräume von f^n sind f-invariant.

(b) Es gelte

$$f \circ g = g \circ f .$$

Zeigen Sie: Die Eigenräume von g sind f-invariant.

Hinweis: Ein Untervektorraum U von V heißt f-invariant, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt.