Lineare Algebra II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
11./12. Mai 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Algebraisch abgeschlossener Körper)
Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat. Welche der folgenden Mengen sind algebraisch abgeschlossene Körper?

(a) $\mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{R}$

(c) $\mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{C}$

(e) $\mathbb{Z}_2$

Zeigen Sie ihre Aussagen für die Mengen, die keine algebraisch abgeschlossenen Körper sind.

Lösung: Von den angegebenen Mengen ist nur $\mathbb{C}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.
$\mathbb{Z}$ ist kein algebraisch abgeschlossener Körper, da die ganzen Zahlen keinen Körper bilden.
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind keine algebraisch abgeschlossenen Körper, da das Polynom x^2+1 in ihnen keine Nullstellen hat.
$\mathbb{Z}_2$ ist kein algebraisch abgeschlossener Körper, da das Polynom x^2+x+1 keine Nullstelle in $\mathbb{Z}_2$ hat.

Aufgabe G2 (Charakteristisches Polynom)
Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq V$ Untervektorräume von V mit

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$$

Außerdem sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und die Unterräume U_i seien f-invariant, d.h. es gilt

$$f(U_i) \subseteq U_i, \quad \forall 1 \le i \le n\,.$$

Das charakteristische Polynom einer linearen Abbildung ist gleich dem charakteristischen Polynom der Matrix dieser Abbildung bezüglich einer beliebigen Basis.
Es sei $f_i := f|_{U_i} : U_i \to V$.
Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von f gleich dem Produkt der charakteristischen Polynome aller f_i ist.

Lösung: Man wählt für alle U_i eine Basis B_i. B sei das Tupel von Vektoren, dass aus den Vektoren aller B_i besteht (wobei die Reihenfolge so sein soll, dass zuerst die Vektoren aus B_1, dann die aus B_2 usw. kommen). Wegen $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ ist B dann eine Basis von V.
Ich bezeichne das charakteristische Polynom von f mit p_f und das von f_i mit p_{f_i}. Dann gilt

$$p_f(t) = \det\left([f - t \cdot \mathrm{id}]_B\right)\,.$$

Wegen der Gestalt von B und da U_i f-invariant ist, hat die Matrix $[f - t \cdot \mathrm{id}]_B$ Blockdiagonalgestalt, wobei die Blöcke gerade die Form $[f_i - t\,\mathrm{id}]_{B_i}$ haben. Daraus ergibt sich

$$p_f(t) = \det\left([f - t \cdot \mathrm{id}]_B\right) = \prod_{i=1}^{n} \det\left([f_i - t\,\mathrm{id}]_{B_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} p_{f_i}\,.$$

w.z.b.w.

Aufgabe G3 (Fibonacci-Zahlen)
Wir definieren rekursiv eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen durch

$$f_1 := 1\,, \qquad f_2 := 1\,, \qquad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Die so konstruierten Zahlen f_n heißen *Fibonacci*-Zahlen.

(a) Berechnen Sie die ersten 8 Fibonacci-Zahlen.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := (f_n, f_{n+1})^T \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine 2×2-Matrix A mit

$$x_{n+1} = A x_n\,.$$

Mit vollständiger Induktion folgt dann $x_n = A^{n-1}x_1$. Insbesondere ist die Fibonacci-Zahl f_n der erste Eintrag des Vektors $A^{n-1}x_1$.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die n-te Fibonacci-Zahl, indem Sie die Potenzen A^n bestimmen.

Lösung:

(a) Es gilt

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ f_7 = 13 \text{ und } f_8 = 21\,.$$

(b) Es muss gelten

$$A\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1}\end{pmatrix} = Ax_n = x_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1}\end{pmatrix}.$$

Dies ist offensichtlich für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

erfüllt.

(c) Die Matrix hat die Eigenwerte $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ mit den Eigenvektoren $x_1 = (1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^T$ und $x_2 = (1, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^T$. Mit der Transformationsmatrix $S := (x_1|x_2)$ gilt also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A^n &= S(S^{-1}AS)^nS^{-1} = S\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n\end{pmatrix}S^{-1} \\ &= \frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & -1 \\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{n-1}x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & -1 \\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) \\ -\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n\end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n - \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da die n-te Fibonacci-Zahl der erste Eintrag von $A^{n-1}x_1$ ist, folgt

$$f_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Aufgabe G4 (Euklidischer Algorithmus)
Es seien a und b zwei ganze Zahlen.

(a) Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von a und b. Machen Sie sich auch klar, warum er funktioniert.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des gerade beschriebenen Algorithmus $ggT(90,24)$ und $ggT(134,52)$.

(c) Machen Sie sich klar, dass man mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus immer Zahlen $l,m \in \mathbb{Z}$ mit

$$ggT(a,b) = la + mb$$

finden kann.
Tipp: Setzen Sie die Gleichungen im Algorithmus von unten nach oben ineinander ein.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus Zahlen $l,m \in \mathbb{Z}$ mit

$$ggT(52,30) = 52l + 30m$$

(e) Es sei auch c eine ganze Zahl. Welche Bedingung muss c erfüllen, damit es ganze Zahlen x und y gibt mit

$$ax + by = c\,.$$

Beweisen Sie ihre Behauptung.

(f) Das Verfahren funktioniert für Polynome genauso.
Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$p(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t \text{ und } q(t) = t^3 + 1\,.$$

Finden Sie außerdem Polynome $r(t)$ und $s(t)$ mit

$$ggT(p(t),q(t)) = r(t)p(t) + s(t)q(t)\,.$$

Lösung:

(a) Der Algorithmus ist derselbe, wie der aus der letzten Hausübung bekannte für Polynome.
D.h. man stellt zuerst fest, dass in den ganzen Zahlen immer eine Division mit Rest möglich ist, d.h. es gibt eindeutig bestimmte ganze Zahlen q_1, r_1 mit $a = q_1 \cdot b + r_1$ und $0 < r_1 < b$.
Im zweiten Schritt führt man dann eine Division mit Rest der Zahlen b und r_1 durch. D.h. es gibt eindeutig bestimmte ganze Zahlen q_2, r_2 mit $b = q_2 \cdot r_1 + r_2$ und $0 < r_2 < r_1$.
Im i-ten Schritt führt man eine Division mit Rest der Zahlen r_{i-2} und r_{i-1} durch. D.h. es gibt eindeutig bestimmte ganze Zahlen q_i, r_i mit $r_{i-2} = q_i \cdot r_{i-1} + r_i$ und $0 < r_i < r_{i-1}$.
Der Algorithmus bricht ab, wenn der Rest Null ist. Der letzte von Null verschiedene Rest ist dann der gesuchte ggT.
Beim Durchführen des Algorithmus ergibt sich die Folge von Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= q_1 \cdot b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= q_2 \cdot r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n + 0\,. \end{aligned}$$

Da die Reste natürliche Zahlen sind, die in jedem Schritt kleiner werden, muss es irgendwann einen Rest Null geben, d.h der Algorithmus bricht ab.
An der letzten Zeile erkennt man, dass $r_n = ggT(r_n, r_{n-1})$ gilt.
An der vorletzten Zeile sieht man, dass jeder gemeinsame Teiler von r_n und r_{n-1} auch ein Teiler von r_{n-2} ist. Andererseits ist auch jeder gemeinsame Teiler von r_{n-2} und r_{n-1} ein Teiler von r_n. Daraus schließt man, dass $ggT(r_n, r_{n-1}) = ggT(r_{n-1}, r_{n-2})$ gilt.
Mit derselben Argumentation für jede Zeile des Algorithmus erhält man

$$r_n = ggT(r_n, r_{n-1}) = ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots = ggT(r_2, r_1) = ggT(r_1, b) = ggT(b,a)\,.$$

D.h. der Algorithmus liefert tatsächlich den größten gemeinsamen Teiler.

(b)

$$\begin{aligned} 90 &= 3 \cdot 24 + 18 \\ 24 &= 1 \cdot 18 + 6 \\ 18 &= 3 \cdot 6 + 0 \end{aligned}$$

D.h. es gilt $ggT(90, 24) = 6$.

$$\begin{aligned} 134 &= 2 \cdot 52 + 30 \\ 52 &= 1 \cdot 30 + 22 \\ 30 &= 1 \cdot 22 + 8 \\ 22 &= 2 \cdot 8 + 6 \\ 8 &= 1 \cdot 6 + 2 \\ 6 &= 3 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

D.h. es gilt $ggT(134, 52) = 2$.

(c) Aus der vorletzten Zeile des euklidischen Algorithmus erhält man

$$ggT(a, b) = r_n = r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1}\,.$$

Die Zeile davor kann man Umformen zu

$$r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1} \cdot r_{n-2}\,.$$

Setzt man dies nun in die letzte Gleichung ein erhält man

$$ggT(a, b) = r_{n-2} - q_n \cdot (r_{n-3} - q_{n-1} \cdot r_{n-2}) = -q_n r_{n-3} + (1 + q_{n-1} q_n) r_{n-2}\,.$$

Dieses Verfahren kann man so fortsetzen. Man erhält dadurch in jedem Schritt eine Darstellung von $ggT(a, b)$ als ganzzahlige Linearkombination von r_i und r_{i-1}, wobei das i in jedem Schritt um eins kleiner wird (hier kann man $b = r_0$ und $a = r_{-1}$ setzen). Im letzten Schritt hat man dann die gesuchte Darstellung

$$ggT(a, b) = la + mb$$

.

(d) Durch das eben beschriebene Verfahren erhält man aus dem im Aufgabenteil (b) durchgeführen Algorithmus

$$\begin{aligned} ggT(52, 30) = 2 &= 8 - 6 \\ &= 8 - (22 - 2 \cdot 8) = -22 + 3 \cdot 8 \\ &= -22 + 3 \cdot (30 - 22) = 3 \cdot 30 - 4 \cdot 22 \\ &= 3 \cdot 30 - 4 \cdot (52 - 30) = -4 \cdot 52 + 7 \cdot 30\,. \end{aligned}$$

Die gesuchten Zahlen sind also $l = -4$ und $m = 7$.

(e) Diese Gleichung ist genau dann lösbar, wenn $d := ggT(a, b)$ ein Teiler von c ist.

Wenn d c nicht teilt, dann ist d immer ein Teiler von $ax + by$, aber keiner von c, die Gleichheit $ax + by = c$ kann also nie erfüllt sein.

Wenn d c teilt gibt es eine ganze Zahle z mit $c = d \cdot z$. Außerdem gibt es nach Aufgabenteil (c) ganze Zahlen l und m mit $al + bm = d$. Damit gilt auch $a(lz) + b(mz) = d \cdot z = c$. D.h. die gegebene Gleichung hat die ganzzahligen Lösungen $x = lz$ und $y = mz$.

(f) Der Euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{aligned} t^4 + t^3 + t^2 + t &= (t + 1)(t^3 + 1) + (t^2 - 1) \\ t^3 + 1 &= t(t^2 - 1) + (t + 1) \\ (t^2 - 1) &= (t - 1)(t + 1) + 0\,. \end{aligned}$$

D.h. es gilt

$$ggT(p(t), q(t)) = t + 1\,.$$

Aus den Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} ggT(p(t), q(t)) = t + 1 &= t^3 + 1 - t(t^2 - 1) \\ &= q(t) - t(p(t) - (t + 1)q(t)) = -tp(t) + (t^2 + t + 1)q(t)\,. \end{aligned}$$

D.h. die gesuchten Polynome sind $r(t) = -t$ und $s(t) = t^2 + t + 1$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Charakteristisches Polynom)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine allgemeine reelle 3×3-Matrix.
Des Weiteren sei

$$F : \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31}$$

eine Abbildung.

(a) Ist F eine lineare Abbildung? Zeigen Sie ihre Behauptung.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom p_A von A in Abhängigkeit der Einträge a_{ij}.

(c) Zeigen Sie, dass für alle invertierbaren, reellen 3×3 Matrizen S

$$F(S^{-1}AS) = F(A)$$

gilt.

Lösung:

(a) F ist nicht linear, denn es gilt für $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$F(\lambda A) = \lambda a_{11}\lambda a_{22} + \lambda a_{22}\lambda a_{33} + \lambda a_{11}\lambda a_{33} - \lambda a_{12}\lambda a_{21} - \lambda a_{23}\lambda a_{32} - \lambda a_{13}\lambda a_{31} = \lambda^2 F(A) \neq \lambda F(A)\,.$$

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das charakteristische Polynom die Gestalt

$$p_A(t) = -t^3 + (\mathrm{tr} A)t^2 + bt + \det A$$

hat. Es ist also nur noch der Koeffizient b zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - t)(a_{22} - t)(a_{33} - t) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}(a_{22} - t)a_{31} - a_{12}a_{21}(a_{33} - t) - (a_{11} - t)a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

D.h. der Koeffizient von p_A vor t ist

$$-a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33} - a_{11}a_{33} + a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31}$$

und das charakteristische Polynom hat die Gestalt

$$\begin{aligned} p_A(t) &= -t^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 + (-a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33} - a_{11}a_{33} + a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31})t \\ &\quad + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \end{aligned}$$

(c) Da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben (siehe zum Beispiel Tutorium 4 Aufgabe T1), ist insbesondere der Koeffizient vor t im charakteristischen Polynom bei ähnlichen Matrizen gleich. Da dieser Koeffizient gerade $-F(A)$ ist (siehe Aufgabenteil (b)) folgt sofort

$$F(S^{-1}AS) = F(A)\,.$$

Aufgabe H2 (Diagonalisierbarkeit)
In dieser Aufgabe wird $a \in \mathbb{Z}$ als Element von $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{C}$ aufgefasst. Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie jeweils eine Matrix $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ mit $a_i \in M$ an, die mindestens drei verschiedene Einträge hat und

(a) über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist, über $\mathbb{Z}_5$ jedoch nicht.

(b) über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, aber über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_5$ nicht.

(c) über $\mathbb{Z}_5$ diagonalisierbar ist, über $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

Beweisen Sie ihre Behauptungen.
Geben Sie weiterhin eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ an, die über $\mathbb{Z}_5$ diagonalisierbar ist, aber über $\mathbb{C}$ nicht.

Lösung: Das charakteristische Polynom ist bekanntlich $p_C(t) = t^2 - (\operatorname{tr} C)t + \det C = 0$. Damit hat man in $\mathbb{C}$ die Lösungsformel

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_4 \pm \sqrt{(a_1+a_4)^2 - 4a_1a_4 + 4a_2a_3}\right).$$

Interessant ist offenbar der Ausdruck $H = (a_1+a_4)^2 - 4a_1a_4 + 4a_2a_3 = (\operatorname{tr} C)^2 - 4\det C$ unter der Wurzel. Die Lösungsformel gilt auch für $\mathbb{Q}$, wenn $\sqrt{H} \in \mathbb{Q}$ ist, ansonsten gibt es in $\mathbb{Q}$ keine Eigenwerte.
Die analoge Formel gilt auch in $\mathbb{Z}_5$, wenn man beachtet, dass die Wurzel nur von $0, 1$ und 4 gezogen werden kann. Es gilt dann in $\mathbb{Z}_5$

$$\pm\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{1} = 1,\ -\sqrt{1} = 4,\ \sqrt{4} = 2,\ -\sqrt{4} = 3\,.$$

Für $H = 2$ oder $H = 3$ modulo 5 hat die Matrix also keine Eigenwerte in $\mathbb{Z}_5$.

(a) C ist in $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar, wenn H eine Quadratzahl ungleich Null ist (denn dann gibt es 2 verschiedene Eigenwerte in $\mathbb{Q}$). Wenn zusätzlich H Null modulo 5 ist, könnte es über $\mathbb{Z}_5$ nicht diagonalisierbar sein (das muss dann aber noch überprüft werden). Dies ist der Fall für $\operatorname{tr} C = 7$ und $\det C = 6$, also z.B. für

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt sofort, dass die linear unabhängigen Eigenvektoren über $\mathbb{Q}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind. Diese sind modulo 5 gleich, d.h. die Matrix besitzt in $\mathbb{Z}_5$ keine Basis aus Eigenvektoren, ist also nicht diagonalisierbar.

(b) Dafür ist es hinreichend, daß H kein Quadrat ist, modulo 5 kein Quadtrat ist und $H \neq 0$ gilt. Dies ist z.B. für $H = 12$, $\operatorname{tr} C = 6$ und $\det C = 6$ der Fall. Ein Beispiel wäre also

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Dazu darf H kein Quadrat sein, H muss aber modulo 5 ein Quadrat sein. Dies ist z.B. für $H = 21, \operatorname{tr} C = 5$ und $\det C = 1$ der Fall. Ein Beispiel dafür ist

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{Z}_5$ bereits diagonalisiert, über $\mathbb{C}$ ist dies jedoch nicht möglich.

Aufgabe H3 (Nilpotente Matrizen)
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist (d.h. eine Potenz von A ist Null).
Bestimmen Sie außerdem eine invertierbare Matrix S für die

$$S^{-1}AS$$

eine obere Dreiecksmatrix ist und geben Sie die Matrix $S^{-1}AS$ an.

Lösung: Es gilt

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ und} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

D.h. A ist nilpotent.
Um S zu bestimmen suchen wir zunächst eine Basis B des $\mathbb{R}^4$, bzgl. der f_A eine obere Dreiecksmatrix ist. Dazu benutzen wir die Anleitung aus Aufgabe G4 vom letzten Übungsblatt.
Es sei also

$$V_0 := \{0\} = \operatorname{im} A^3, V_1 := \operatorname{im} A^2, V_2 := \operatorname{im} A, V_3 := \mathbb{R}^4 = \operatorname{im} A^0 = \operatorname{im} E .$$

Da das Bild einer Matrix immer von ihren Spaltenvektoren aufgespannt wird, gilt

$$V_1 = \operatorname{im} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Als ersten Basisvektor von B wählen wir also

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Des Weiteren gilt

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \operatorname{im} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .
\end{aligned}
$$

D.h. wir wählen als zweiten Basisvektor

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Nun ergänzen wir $\{b_1, b_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$. Dies kann z.B. durch die Vektoren

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschehen.

Nun ist S die folgende Basiswechselmatrix.

$$S := [\mathrm{id}]_E^B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\begin{aligned} A \cdot b_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \\ A \cdot b_2 &= \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4b_1 . \\ A \cdot b_3 &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2b_1 \text{ und} \\ A \cdot b_4 &= \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3b_1 \end{aligned}$$

gilt dann

$$S^{-1}AS = [f_A]_B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$