Lineare Algebra II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
11./12. Mai 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Algebraisch abgeschlossener Körper)
Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat. Welche der folgenden Mengen sind algebraisch abgeschlossene Körper?

(a) $\mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{R}$

(c) $\mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{C}$

(e) $\mathbb{Z}_2$

Zeigen Sie ihre Aussagen für die Mengen, die keine algebraisch abgeschlossenen Körper sind.

Aufgabe G2 (Charakteristisches Polynom)
Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq V$ Untervektorräume von V mit

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$$

Außerdem sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und die Unterräume U_i seien f-invariant, d.h. es gilt

$$f(U_i) \subseteq U_i, \ \ \forall 1 \leq i \leq n\,.$$

Das charakteristische Polynom einer linearen Abbildung ist gleich dem charakteristischen Polynom der Matrix dieser Abbildung bezüglich einer beliebigen Basis.
Es sei $f_i := f|_{U_i} : U_i \to V$.
Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von f gleich dem Produkt der charakteristischen Polynome aller f_i ist.

Aufgabe G3 (Fibonacci-Zahlen)
Wir definieren rekursiv eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen durch

$$f_1 := 1\,, \qquad f_2 := 1\,, \qquad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Die so konstruierten Zahlen f_n heißen *Fibonacci*-Zahlen.

(a) Berechnen Sie die ersten 8 Fibonacci-Zahlen.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := (f_n, f_{n+1})^T \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine 2×2-Matrix A mit

$$x_{n+1} = A x_n\,.$$

Mit vollständiger Induktion folgt dann $x_n = A^{n-1} x_1$. Insbesondere ist die Fibonacci-Zahl f_n der erste Eintrag des Vektors $A^{n-1} x_1$.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die n-te Fibonacci-Zahl, indem Sie die Potenzen A^n bestimmen.

Aufgabe G4 (Euklidischer Algorithmus)
Es seien a und b zwei ganze Zahlen.

(a) Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von a und b. Machen Sie sich auch klar, warum er funktioniert.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des gerade beschriebenen Algorithmus $ggT(90, 24)$ und $ggT(134, 52)$.

(c) Machen Sie sich klar, dass man mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus immer Zahlen $l, m \in \mathbb{Z}$ mit

$$ggT(a, b) = la + mb$$

finden kann.

Tipp: Setzen Sie die Gleichungen im Algorithmus von unten nach oben ineinander ein.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus Zahlen $l, m \in \mathbb{Z}$ mit

$$ggT(52, 30) = 52l + 30m$$

(e) Es sei auch c eine ganze Zahl. Welche Bedingung muss c erfüllen, damit es ganze Zahlen x und y gibt mit

$$ax + by = c\,.$$

Beweisen Sie ihre Behauptung.

(f) Das Verfahren funktioniert für Polynome genauso.
Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$p(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t \text{ und } q(t) = t^3 + 1\,.$$

Finden Sie außerdem Polynome $r(t)$ und $s(t)$ mit

$$ggT(p(t), q(t)) = r(t)p(t) + s(t)q(t)\,.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Charakteristisches Polynom)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine allgemeine reelle 3×3-Matrix.
Des Weiteren sei

$$F : \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31}$$

eine Abbildung.

(a) Ist F eine lineare Abbildung? Zeigen Sie ihre Behauptung.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom p_A von A in Abhängigkeit der Einträge a_{ij}.

(c) Zeigen Sie, dass für alle invertierbaren, reellen 3×3 Matrizen S

$$F(S^{-1}AS) = F(A)$$

gilt.

Aufgabe H2 (Diagonalisierbarkeit)
In dieser Aufgabe wird $a \in \mathbb{Z}$ als Element von $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{C}$ aufgefasst. Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie jeweils eine Matrix $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ mit $a_i \in M$ an, die mindestens drei verschiedene Einträge hat und

(a) über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist, über $\mathbb{Z}_5$ jedoch nicht.

(b) über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, aber über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_5$ nicht.

(c) über $\mathbb{Z}_5$ diagonalisierbar ist, über $\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

Beweisen Sie ihre Behauptungen.
Geben Sie weiterhin eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ an, die über $\mathbb{Z}_5$ diagonalisierbar ist, aber über $\mathbb{C}$ nicht.

Aufgabe H3 (Nilpotente Matrizen)
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist (d.h. eine Potenz von A ist Null).
Bestimmen Sie außerdem eine invertierbare Matrix S für die

$$S^{-1}AS$$

eine obere Dreiecksmatrix ist und geben Sie die Matrix $S^{-1}AS$ an.