Lineare Algebra II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
04./05. Mai 2011

Gruppenübung

Bei den folgenden Aufgaben sind jeweils alle richtigen Antworten zu bestimmen (es kann auch mehr als eine Antwort richtig sein).

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Eigenwerte kann man nur definieren, wenn

- ☐ f surjektiv ist.
- ☐ f bijektiv ist.
- ☐ f ein Endomorphismus ist.
- ☐ f ein Isomorphismus ist.

(b) Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ mit $f(-v) = \lambda v$. Dann ist

- ☐ v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.
- ☐ $-v$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.
- ☐ v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $-\lambda$.
- ☐ $-v$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $-\lambda$.

(c) Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert der linearen Abbildung f. Der zugehörige Eigenraum sei V_λ.

- ☐ Dann gilt $V_\lambda = \ker(\lambda \,\mathrm{id})$.
- ☐ Dann gilt $V_\lambda = \ker(f - \lambda \,\mathrm{id})$.
- ☐ Dann ist V_λ die Menge aller Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ.
- ☐ Dann ist V_λ die Menge aller Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ vereinigt mit der Menge, die aus dem Nullvektor besteht.
- ☐ Dann gilt $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
- ☐ Dann gilt $f(V_\lambda) = V_\lambda$.

Lösung:

(a) Nur die dritte Aussage ist richtig, d.h. es muss $V = W$ gelten.

(b) Die ersten beiden Aussagen sind falsch, die letzten beiden sind richtig.

(c) Die erste und die dritte Aussage sind falsch, die anderen sind wahr.

Aufgabe G2 (Geometrische und algebraische Vielfachheit)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

(c) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.

Lösung:

(a) Offensichtlich ist das charakteristische Polynom der Matrix B

$$P_B(t) = (1-t)(2-t)(6-t)\,.$$

Die Eigenwerte sind also $1, 2$ und 6 und sie haben die algebraische Vielfachheit eins.

Da die Eigenwerte zu verschiedenen Eigenvektoren linear unabhängig sind, es zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor gibt und es in $\mathbb{R}^3$ nicht mehr als 3 linear unabhängige Vektoren gibt, ist die Dimension der Eigenräume eins. D.h. die geometrische Vielfachheit jedes Eigenvektors von B ist eins.

Alternativ kann man zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheiten verwenden, dass

$$\dim V_\lambda = \dim \ker(A - \lambda E) = \dim V - \operatorname{rank}\,(A - \lambda E) = 3 - \operatorname{rank}\,(A - \lambda E)$$

gilt. Diese Dimension lässt sich also über den Rang der Matrix $A - \lambda E$ bestimmen.

Als weitere Alternative könnte man die Eigenräume direkt ausrechnen und ihre Dimension bestimmen.

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$\det(A - \lambda E_3) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den algebraischen Vielfachheiten 2 beziehungsweise 1.

Für die geometrischen Vielfachheiten bestimmen wir die Dimensionen von V_{λ_1} und V_{λ_2}:

$$\dim V_{\lambda_1} = \dim \ker(A - E) = 3 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\dim V_{\lambda_2} = \dim \ker(A - 2E) = 3 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Wir sehen also, dass beide Eigenwerte eine geometrische Vielfachheit von 1 haben.

(c) Bezeichne mit k die geometrische Vielfachheit von λ. Dann gibt es linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_i = \lambda v_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Wir ergänzen diese Vektoren zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{K}^n$. Bezeichne mit $S := (v_1 | \ldots | v_n) \in M_n(\mathbb{K})$ die entsprechende Transformationsmatrix. Dann hat die Matrix $S^{-1}AS$ die Gestalt

$$S^{-1}AS = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & A_1 \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A_2 \end{array}\right)$$

mit einer $k \times (n-k)$-Matrix A_1 und einer $(n-k) \times (n-k)$-Matrix A_2. Für das charakteristische Polynom gilt dann

$$\det(A - tE) = \det(S^{-1}(A - tE)S) = \det(S^{-1}AS - tE) = (\lambda - t)^k \cdot \det(A_2 - tE)\,.$$

Somit hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit k.

Aufgabe G3 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ aller reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Abbildung

$$S : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}, \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S.

Lösung: Betrachten wir die Bedingung

$$S(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, \dots) \stackrel{!}{=} (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots),$$

dann erkennen wir eine äquivalente Bedingung dafür, dass λ ein Eigenwert von S ist, als

$$\begin{aligned} a_2 &= \lambda a_1 \\ a_3 &= \lambda a_2 = \lambda^2 a_1 \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \lambda^n a_1. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ ist also

$$(b_n)^{\lambda}_{n\in\mathbb{N}} := (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}, \dots)$$

ein Eigenvektor von S. Ebenso sind natürlich alle skalaren Vielfachen von $(b_n)^{\lambda}_{n\in\mathbb{N}}$, welche den Startwert der Folge festlegen, Eigenvektoren zu λ. Wir sehen also, dass jeder Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit dem zugehörigen Eigenvektor $(b_n)^{\lambda}_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe G4 (Nilpotente Matrizen)
Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$, es gelte also $A^d = 0$ für ein $d \in \mathbb{N}$, aber $A^r \neq 0$ für $r < d$.
Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt, bezüglich der A strikt obere Diagonalgestalt hat, also von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.
Anleitung:

(a) Zeigen Sie für $V_k := \operatorname{im} A^{d-k}$ die folgende Kette von Inklusionen:

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_{d-1} \subseteq V_d = \mathbb{K}^n.$$

(b) Wählen Sie eine Basis von V_1, ergänzen Sie diese zu einer Basis von V_2 und fahren Sie fort, bis Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ gefunden haben.

(c) Zeigen Sie, dass A in dieser Basis strikte obere Diagonalgestalt hat.

Lösung:

(a) Es ist klar, dass $V_0 = \operatorname{im} A^d = \operatorname{im} 0 = 0$ und $V_d = \operatorname{im} A^0 = \operatorname{im} E = \mathbb{K}^n$ gelten. Sei nun $w \in V_k$. Dann gibt es $v \in \mathbb{K}^n$ mit $A^{d-k} v = w$. Dann gilt aber auch $A^{d-k-1}(Av) = w$, also ist $w \in \operatorname{im} A^{d-k-1} = V_{k+1}$.

(b) Es ist $\dim V_1 \neq 0$, denn sonst wäre $A^{d-1} = 0$ im Widerspruch zur Annahme. Wir wählen uns eine Basis $\mathcal{B}_1$ von V_1. Diese ergänzen wir zu einer Basis $\mathcal{B}_2$ von V_2. Wir fahren so fort. Schließlich erhalten wir eine Basis $\mathcal{B} := \mathcal{B}_d$ von $\mathbb{K}^n$.

(c) Alle Vektoren $v \in \mathcal{B}_1$ erfüllen $Av = 0$. Wie wir gezeigt haben, ist $Av_k \in V_{k-1}$ für alle $v_k \in V_k$. Ist also $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, dann lässt sich Av_k als Linearkombination von $v_1, \dots, v_{k-1}$ schreiben:

$$Av_k = \lambda_{k_1} v_1 + \ldots + \lambda_{k_{k-1}} v_{k-1}$$

für alle $2 \leq k \leq n$. Außerdem ist $Av_1 = 0$, denn es ist $v_1 \in \mathcal{B}_1 \subset V_1 = \ker A$. Damit lautet die Matrixdarstellung in der Basis $\mathcal{B}$:

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{2_1} & \lambda_{3_1} & \cdots & \lambda_{n_1} \\ 0 & \ddots & \lambda_{3_2} & \cdots & \lambda_{n_2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_{n_{n-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Euklidischer Algorithmus)
Unter dem *größten gemeinsamen Teiler* $\mathrm{ggT}(f,g)$ zweier Polynome f und g verstehen wir ein Polynom q, welches normiert ist, f und g teilt und außerdem von jedem anderen Polynom geteilt wird, welches ein Teiler von f und g ist.
Seien $f,g \neq 0$ Polynome. Satz 7.2.7 der Vorlesung besagt, dass es Polynome q_0 und r_1 gibt, so dass $\deg r_1 < \deg g$ und

$$f = q_0 g + r_1$$

gelten. Satz 7.2.7 liefert uns dann, auf die Polynome g und r_1 angewendet, weitere Polynome q_1 und r_2, so dass die Gleichung

$$g = q_1 r_1 + r_2$$

erfüllt ist und $\deg r_2 < \deg r_1$ gilt. In jedem weiteren Schritt wird mit dem Divisor und dem Rest des vorhergehenden Schritts eine erneute Division mit Rest durchgeführt.

(a) Wann bricht das Verfahren ab? Zeigen Sie, dass dies nach endlich vielen Schritten passiert und uns zwei Polynome q_n und r_n liefert.

(b) Zeigen Sie, dass r_n nach einer Normierung der größte gemeinsame Teiler von f und g ist.

(c) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x$ und $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$ mit diesem Algorithmus.

Lösung:

(a) Wegen der Bedingung $\deg r_i < \deg r_{i-1}$ und wegen $\deg p \in \mathbb{N}$ für alle Polynome p muss das Verfahren nach endlich vielen Schritten mit $r_n = 0$ abbrechen. Wir erhalten also eine Folge von Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= q_0 g + r_1 && (1)\\ g &= q_1 r_1 + r_2 && (2)\\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 && (3)\\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n && (\mathrm{n})\\ r_{n-1} &= q_n r_n && (\mathrm{n+1}) \end{aligned}$$

(b) An der letzten Gleichung sehen wir, dass r_n ein Teiler von r_{n-1} ist. Das ergibt mit Gleichung (n), dass r_n auch ein Teiler von r_{n-2} sein muss. Allgemein folgt aus den Gleichungen (i) und (i-1), dass r_n ein Teiler von r_{i-2} ist. Letztendlich folgt, dass r_n sowohl r_1 als auch r_2 teilt. Gleichung (2) liefert, dass r_n ein Teiler von g ist. Zusammen mit (1) sehen wir, dass r_n auch f teilt.

Jetzt zeigen wir noch, dass jedes Polynom h, welches f und g teilt, auch r_n teilen muss. Die erste Gleichung liefert, dass h auch r_1 teilt. Das ergibt mit Gleichung (2), dass h auch r_2 teilt. Wir folgern wieder, dass h auch r_n teilen muss.

Insgesamt folgt, dass r_n nach einer Normierung alle geforderten Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers erfüllt.

(c) Der Algorithmus liefert die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{2}x\right)(2x^3 - 3x^2 - 23x + 12) + (6x^2 - 3x) \\ (2x^3 - 3x^2 - 23x + 12) &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)(6x^2 - 3x) + (-24x + 12) \\ (6x^2 - 3x) &= \left(-\frac{1}{4}x\right)(-24x + 12) + 0. \end{aligned}$$

Es folgt also $\mathrm{ggT}(f,g) = (-24x + 12) : (-24) = (x - 0.5)$.

Aufgabe H2 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

(a) Sei $f : V \to V$ ein $\mathbb{K}$-Endomorphismus und sei

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$$

ein Polynom. Wir definieren

$$p(f) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 f + \ldots + a_n f^n : V \to V$$

als die Anwendung des Polynoms $p(t)$ auf f.

Zeigen Sie: ist λ ein Eigenwert von f, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

(b) Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Wir definieren die Abbildung

$$f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Eigenwerte kann f_π haben? Geben Sie für alle möglichen Kombinationen ein Beispiel an.

(Tipp: Betrachten Sie eine Zerlegung von π in disjunkte Zykel.)

Lösung:

(a) Es gilt

$$p(f)v = a_0 v + a_1 f(v) + \ldots + a_n f^n(v) = a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_n \lambda^n v = (a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_n \lambda^n)v = p(\lambda)v.$$

(b) Jede Permutation ist idempotent, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\pi^n = \mathrm{id}$ (das ist klar für Zykel, und jede Permutation ist ein Produkt von disjunkten Zykeln). Angewandt auf die Eigenwertgleichung sehen wir

$$f_\pi(v) = \lambda v \iff f_\pi^n(v) = \lambda^n v \iff v = \lambda^n v \implies \lambda^n = 1.$$

Das Polynom $\lambda^n - 1$ hat in $\mathbb{R}$ nur höchstens zwei Nullstellen, also ist $\lambda \in \{-1, 1\}$. Dies sind die einzigen möglichen Eigenwerte.

Jede Permutation hat den Eigenwert $\lambda_1 = 1$, denn der Eigenvektor $(1, \ldots, 1)$ wird von jeder Permutation festgelassen. Es gibt auch Permutationen, die $\lambda_2 = -1$ als Eigenwert haben: beispielsweise hat die Abbildung $f_{(1\ 2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ den Eigenvektor $(1, -1)^T$ zum Eigenwert -1.

Es bleibt noch zu untersuchen, in welchen Fällen der Eigenwert -1 vorkommt. Sei dafür

$$\pi = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_\ell$$

die Zerlegung von π in disjunkte Zykel. Die Eigenwertgleichung für einen einzelnen Zykel $\pi_k = (k_1, \ldots, k_{r_k})$ und $\lambda = -1$ führt auf

$$f_{\pi_k}(v) = \lambda v \iff (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k_{r_k}}, \ldots, x_{k_1}, x_{k_{r_k}+1}, \ldots, x_n) = -(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_k-1}}, x_{k_{r_k}+1}, \ldots, x_n),$$

woraus wir die Bedingungen

$$x_{k_1} = -x_{k_{r_k}} = (-1)^2 x_{k_{r_k-1}} = \ldots = (-1)^r x_{k_1} \quad \text{und} \quad x_1 = \ldots = x_{k-1} = x_{k_{r_k}+1} = \ldots = x_n = 0$$

folgern. Es ist also nur für r gerade möglich, den Eigenwert -1 zu erhalten. In diesem Fall liefert zum Beispiel der Vektor

$$v = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k_1}, -1, \ldots, 1, \underbrace{-1}_{k_{r_k}}, 0, \ldots, 0)$$

einen Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Wir sehen also, dass π den Eigenwert -1 nicht haben kann, wenn in der Zykelzerlegung kein Zykel gerader Länge vorkommt. Wenn hingegen ein Zykel gerader Länge vorkommt, dann erhalten wir durch v einen Eigenvektor zum Eigenwert -1. Den Eigenwert 1 hat hingegen jede Permutation.

Aufgabe H3 (Nilpotente Matrizen)

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom einer Matrix sich bei einem Basiswechsel nicht verändert.

(b) Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom gilt

$$P_A(t) = (-1)^n t^n.$$

(c) Sei A eine $n \times n$-Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass aus $(A - \lambda E_n)^d = 0$ für das charakteristische Polynom

$$P_A(t) = (\lambda - t)^n$$

folgt.

Lösung:

(a) Sei $B = S^{-1}AS$. Da $S^{-1}E_nS = E_n$ ist, gilt

$$\det(B - \lambda E_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda E_n) = \det(S^{-1}(A - \lambda E_n)S) = \det(A - \lambda E_n).$$

(b) Wir wissen aus Aufgabe G3, dass A nach einem Basiswechsel strikte obere Diagonalgestalt hat. Da sich wegen a) das charakteristische Polynom nicht ändert, können wir also o.B.d.A. annehmen, dass A strikte obere Diagonalgestalt hat.

Dann ist die Aussage klar, denn dann hat $A - tE_n$ obere Diagonalgestalt und die Determinante einer solchen Matrix ist das Produkt der Diagonaleinträge.

(c) Es ist $A - \lambda E_n$ nilpotent. Auch hier können wir aus dem gleichen Grund $A - \lambda E_n$ als strikte obere Diagonalmatrix annehmen.

Dann ist also A eine obere Dreiecksmatrix, die den Wert λ in jedem Diagonaleintrag hat. Damit folgt die Behauptung.