Lineare Algebra II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
04./05. Mai 2011

Gruppenübung

Bei den folgenden Aufgaben sind jeweils alle richtigen Antworten zu bestimmen (es kann auch mehr als eine Antwort richtig sein).

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Eigenwerte kann man nur definieren, wenn

- □ f surjektiv ist.
- □ f bijektiv ist.
- □ f ein Endomorphismus ist.
- □ f ein Isomorphismus ist.

(b) Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ mit $f(-v) = \lambda v$. Dann ist

- □ v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.
- □ $-v$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.
- □ v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $-\lambda$.
- □ $-v$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $-\lambda$.

(c) Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert der linearen Abbildung f. Der zugehörige Eigenraum sei V_λ.

- □ Dann gilt $V_\lambda = \ker(\lambda \,\mathrm{id})$.
- □ Dann gilt $V_\lambda = \ker(f - \lambda \,\mathrm{id})$.
- □ Dann ist V_λ die Menge aller Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ.
- □ Dann ist V_λ die Menge aller Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ vereinigt mit der Menge, die aus dem Nullvektor besteht.
- □ Dann gilt $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
- □ Dann gilt $f(V_\lambda) = V_\lambda$.

Aufgabe G2 (Geometrische und algebraische Vielfachheit)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit.

(c) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.

Aufgabe G3 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Abbildung

$$S\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S.

Aufgabe G4 (Nilpotente Matrizen)
Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$, es gelte also $A^d = 0$ für ein $d \in \mathbb{N}$, aber $A^r \neq 0$ für $r < d$.
Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ gibt, bezüglich der A strikt obere Diagonalgestalt hat, also von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.
Anleitung:

(a) Zeigen Sie für $V_k := \operatorname{im} A^{d-k}$ die folgende Kette von Inklusionen:

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_{d-1} \subseteq V_d = \mathbb{K}^n.$$

(b) Wählen Sie eine Basis von V_1, ergänzen Sie diese zu einer Basis von V_2 und fahren Sie fort, bis Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ gefunden haben.

(c) Zeigen Sie, dass A in dieser Basis strikte obere Diagonalgestalt hat.

Hausübung

Aufgabe H1 (Euklidischer Algorithmus)
Unter dem *größten gemeinsamen Teiler* $\mathrm{ggT}(f,g)$ zweier Polynome f und g verstehen wir ein Polynom q, welches normiert ist, f und g teilt und außerdem von jedem anderen Polynom geteilt wird, welches ein Teiler von f und g ist.
Seien $f, g \neq 0$ Polynome. Satz 7.2.7 der Vorlesung besagt, dass es Polynome q_0 und r_1 gibt, so dass $\deg r_1 < \deg g$ und

$$f = q_0 g + r_1$$

gelten. Satz 7.2.7 liefert uns dann, auf die Polynome g und r_1 angewendet, weitere Polynome q_1 und r_2, so dass die Gleichung

$$g = q_1 r_1 + r_2$$

erfüllt ist und $\deg r_2 < \deg r_1$ gilt. In jedem weiteren Schritt wird mit dem Divisor und dem Rest des vorhergehenden Schritts eine erneute Division mit Rest durchgeführt.

(a) Wann bricht das Verfahren ab? Zeigen Sie, dass dies nach endlich vielen Schritten passiert und uns zwei Polynome q_n und r_n liefert.

(b) Zeigen Sie, dass r_n nach einer Normierung der größte gemeinsame Teiler von f und g ist.

(c) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x$ und $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$ mit diesem Algorithmus.

Aufgabe H2 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

(a) Sei $f : V \to V$ ein $\mathbb{K}$-Endomorphismus und sei

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$$

ein Polynom. Wir definieren

$$p(f) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 f + \ldots + a_n f^n : V \to V$$

als die Anwendung des Polynoms $p(t)$ auf f.
Zeigen Sie: ist λ ein Eigenwert von f, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

(b) Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Wir definieren die Abbildung

$$f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Eigenwerte kann f_π haben? Geben Sie für alle möglichen Kombinationen ein Beispiel an.
(Tipp: Betrachten Sie eine Zerlegung von π in disjunkte Zykel.)

Aufgabe H3 (Nilpotente Matrizen)

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom einer Matrix sich bei einem Basiswechsel nicht verändert.

(b) Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom gilt

$$P_A(t) = (-1)^n t^n.$$

(c) Sei A eine $n \times n$-Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass aus $(A - \lambda E_n)^d = 0$ für das charakteristische Polynom

$$P_A(t) = (\lambda - t)^n$$

folgt.