Lineare Algebra II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
27./28. April 2011

Minitest

Aufgabe M1 (Formale Polynome)
Betrachten Sie die folgenden Polynome $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{K}[t]$ über dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen.

$$p_1(t) := t^2 + 1 , \qquad p_2(t) := (t+1)^2 , \qquad p_3(t) := t + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Alle Polynome sind gleich.
- ☐ Die Polynome p_1 und p_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Polynome sind gleich.

Lösung: Nur die zweite Aussage ist richtig.

Aufgabe M2 (Polynomfunktionen)
Betrachten Sie die folgenden Polynomfunktionen $q_1, q_2, q_3 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ auf dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen.

$$q_1(x) := x^2 + 1 , \qquad q_2(x) := (x+1)^2 , \qquad q_3(x) := x + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Alle Funktionen sind gleich.
- ☐ Die Funktionen q_1 und q_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Funktionen sind gleich.

Lösung: Die ersten beiden Aussagen sind wahr, die letzte ist falsch.

Aufgabe M3 (Nullstellen von Polynomen)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Jedes Polynom vom Grad größer Null mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
- ☐ Jedes Polynom vom Grad größer Null mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
- ☐ Jedes Polynom vom Grad größer Null mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Lösung: Die erste Aussage ist falsch, die letzten beiden sind wahr.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenwerte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der $n \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} ,$$

deren Einträge alle Eins sind.

Lösung: Ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert n ist offensichtlich $x_0 := (1, 1, \dots, 1)^T$.
Außerdem hat die Matrix A offensichtlich den Rang 1 und somit einen $(n-1)$-dimensionalen Kern.
Zum Eigenwert 0 gibt es deshalb $n-1$ linear unabhängig Eigenvektoren. Man rechnet leicht nach, dass z.B. die Vektoren

$$x_1 := (1, -1, 0, \dots)^T , \qquad x_2 := (0, 1, -1, 0, \dots)^T , \qquad \dots , \qquad x_{n-1} := (0, \dots, 0, 1, -1)^T$$

eine solche Familie bilden.
D.h. A hat die Eigenwerte n und 1 und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{span}(x_0) \text{ und } \operatorname{span}(x_1, \dots, x_{n-1}) .$$

Aufgabe G2 (Nullstellen von Polynomen)

(a) Es sei $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N \in \mathbb{K}[t]$ ein Polynom mit N verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann

$$a_0 = (-1)^N \cdot a_N \cdot \prod_{i=1}^{N} \lambda_i \text{ und } a_{N-1} = -a_N \cdot \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie mittels Polynomdivision für das folgende Polynom alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten:

$$p(t) := t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 .$$

Hinweis: Das Polynom besitzt nur ganzzahlige Nullstellen.

Lösung:

(a) In diesem Fall gilt

$$p(t) = a_N(t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_N) .$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$p(t) = a_N t^N + \left(-a_N \cdot \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \right) t^{N-1} + \dots + (-1)^N \cdot a_N \cdot \prod_{i=1}^{N} \lambda_i .$$

Aus einem Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung.

(b) Man errät die Nullstellen 1 und -1 und führt eine Polynomdivision durch. Diese ergibt

$$p(t) = (t-1)(t^4 + 2t^3 - 2t - 1) = (t-1)(t+1)(t^3 + t^2 - t - 1) .$$

Der letzte Faktor hat wieder die Nullstelle 1. Man erhält also durch eine weitere Polynomdivision

$$p(t) = (t-1)^2(t+1)(t^2 + 2t + 1) = (t-1)^2(t+1)^3 .$$

D.h. das Polynom hat nur die Nullstellen 1 und -1 mit einer Vielfachheit von 2 bzw. 3.

Aufgabe G3 (Der Körper mit zwei Elementen)

(a) Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch ein Polynom vom Grad 2 realisiert werden kann, d.h. es gibt ein Polynom $p(t) = t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$ mit $f(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

(b) Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$, die keine Eigenwerte haben.

Lösung:

(a) Es gibt nur vier Funktionen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Diese sind durch ihre Werte auf den zwei Körperelementen 0 und 1 eindeutig bestimmt.

Für f_1 mit $f_1(0) = 0$ und $f_1(1) = 0$ gilt

$$f_1(x) = x^2 + 1 \cdot x + 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}\,.$$

Für f_2 mit $f_2(0) = 1$ und $f_2(1) = 0$ gilt

$$f_2(x) = x^2 + 0 \cdot x + 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}\,.$$

Für f_3 mit $f_3(0) = 0$ und $f_3(1) = 1$ gilt

$$f_3(x) = x^2 + 0 \cdot x + 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}\,.$$

Für f_4 mit $f_4(0) = 1$ und $f_4(1) = 1$ gilt

$$f_4(x) = x^2 + 1 \cdot x + 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}\,.$$

Dies zeigt die Behauptung.

(b) Insgesamt gibt es $2^4 = 16$ Matrizen in $M_2(\mathbb{K})$. Die gesuchten Matrizen dürfen keinen Kern haben und sind somit invertierbar.

In $M_2(\mathbb{K})$ sind offensichtlich nur die 6 Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar (und haben deswegen 0 nicht als Eigenwert).

Man sieht sofort, dass die Gleichung $\det(A - E) = 0$ nur für die erste, zweite, vierte und fünfte Matrix erfüllt ist (diese haben also den Eigenwert 1).

D.h. nur die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

haben keine Eigenwerte.

Hausübung

Aufgabe H1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix und $\overline{A}$ die konjugierte Matrix (welche aus A entsteht, indem man alle Einträge von A konjugiert).
Wie hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und $\overline{A}$ zusammen? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Lösung: Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann ist $\overline{v}$ ein Eigenvektor von $\overline{A}$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.
Beweis: Aus $Av = \lambda v$ folgt

$$\overline{A} \cdot \overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v} \, .$$

Das heißt gerade: $\overline{v}$ ist ein Eigenvektor von $\overline{A}$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

Aufgabe H2 (Nullstellen von Polynomen)
Es sei $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle von $p(t)$, dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von $p(t)$.
(b) Ist der Grad von $p(t)$ ungerade, so hat $p(t)$ mindestens eine reelle Nullstelle.
(c) Ist der Grad von $p(t)$ gerade und gilt $a_0 \cdot a_N < 0$, so hat $p(t)$ mindestens zwei reelle Nullstellen.

In den Aufgabenteilen (b) und (c) dürfen Sie vorraussetzen, dass z und $\overline{z}$ für jede Nullstelle $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ die gleiche Vielfachheit besitzen.

Lösung:

(a) Aus $p(z) = 0$ folgt

$$p(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + \ldots + a_N\overline{z}^N = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \ldots + \overline{a_N} \cdot \overline{z}^N = \overline{a_0 + a_1 z + \ldots + a_N z^N} = \overline{p(z)} = 0 \, .$$

Dies zeigt die Behauptung.

(b) Über $\mathbb{C}$ zerfällt das Polynom in Linearfaktoren, d.h mit Vielfachheit gezählt hat p genau N Nullstellen. Da wegen (a) komplexe Nullstellen, die nicht reell sind, immer nur in Paaren auftreten (jeweils z und $\overline{z}$) und N ungerade ist, folgt, dass mindestens eine Nullstelle reell sein muss.

(c) Wieder zerfällt das Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Analog zu Aufgabe G3 (a) erhält man, dass

$$a_0 = (-1)^N a_N \cdot \text{ Produkt aller Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) } .$$

Da $(-1)^N = 1$ ist und a_0 und a_N verschiedene Vorzeichen haben, muss das Produkt aller Nullstellen negativ sein.
Da für jede Nullstelle $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist und $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt, folgt, dass es mindestens eine weitere Nullstelle aus $\mathbb{R}^{<0}$ geben muss.
Da die komplexen Nullstellen wieder nur in Paaren auftreten und N gerade ist, muss es noch eine zweite reelle Nullstelle geben.

Aufgabe H3 (Polynome)
Es seien $f(t), g(t) \in \mathbb{C}[t]$ zwei von Null verschiedene Polynome. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) f und g haben mindestens eine gemeinsame Nullstelle.
(ii) Es gibt von Null verschiedene Polynome $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathbb{C}[t]$ mit

$$\deg \widetilde{f} < \deg f, \ \deg \widetilde{g} < \deg g \quad \text{und} \quad \widetilde{g} \cdot f + \widetilde{f} \cdot g = 0 \, .$$

Lösung:

- Angenommen es gilt (i). Die gemeinsame Nullstelle sei λ.
  Dann gibt es von Null verschiedene Polynome $u(t)$ und $v(t)$ mit

  $$\begin{aligned} f(t) &= (t-\lambda)u(t) \\ g(t) &= (t-\lambda)v(t) \end{aligned}$$

  Nun setzt man $\widetilde{f} = u(t)$ und $\widetilde{g} = -v(t)$. Dann gilt

  $$\widetilde{g} \cdot f + \widetilde{f} \cdot g = -v(t)(t-\lambda)u(t) + u(t)(t-\lambda)v(t) = 0 \, .$$

  Außerdem ist der Grad von $\widetilde{f}$ bzw. $\widetilde{g}$ um eins kleiner als der von f bzw. g.
  D.h. die Aussage (ii) ist erfüllt.

- Angenommen es gilt (ii).

  Insbesondere gilt $\widetilde{g} \cdot f = -g \cdot \widetilde{f}$. Beide Polynome zerfallen über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, mit denselben Nullstellen. Wegen $\deg \widetilde{f} < \deg f$ gibt es einen Linearfaktor von f, der nicht in $\widetilde{f}$ enthalten ist. Dieser muss ein Faktor von g sein. Die entsprechende Nullstelle ist dann eine gemeinsame Nullstelle von f und g.

  D.h. die Aussage (i) gilt.