Lineare Algebra II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
27./28. April 2011

Minitest

Aufgabe M1 (Formale Polynome)
Betrachten Sie die folgenden Polynome $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{K}[t]$ über dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen.

$$p_1(t) := t^2 + 1 , \qquad p_2(t) := (t+1)^2 , \qquad p_3(t) := t + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Alle Polynome sind gleich.
- ☐ Die Polynome p_1 und p_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Polynome sind gleich.

Aufgabe M2 (Polynomfunktionen)
Betrachten Sie die folgenden Polynomfunktionen $q_1, q_2, q_3 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ auf dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen.

$$q_1(x) := x^2 + 1 , \qquad q_2(x) := (x+1)^2 , \qquad q_3(x) := x + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Alle Funktionen sind gleich.
- ☐ Die Funktionen q_1 und q_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Funktionen sind gleich.

Aufgabe M3 (Nullstellen von Polynomen)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Jedes Polynom vom Grad größer Null mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
- ☐ Jedes Polynom vom Grad größer Null mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
- ☐ Jedes Polynom vom Grad größer Null mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenwerte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der $n \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} ,$$

deren Einträge alle Eins sind.

Aufgabe G2 (Nullstellen von Polynomen)

(a) Es sei $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \in \mathbb{K}[t]$ ein Polynom mit N verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann

$$a_0 = (-1)^N \cdot a_N \cdot \prod_{i=1}^{N} \lambda_i \text{ und } a_{N-1} = -a_N \cdot \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie mittels Polynomdivision für das folgende Polynom alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten:

$$p(t) := t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 .$$

Hinweis: Das Polynom besitzt nur ganzzahlige Nullstellen.

Aufgabe G3 (Der Körper mit zwei Elementen)

(a) Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch ein Polynom vom Grad 2 realisiert werden kann, d.h. es gibt ein Polynom $p(t) = t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$ mit $f(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

(b) Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$, die keine Eigenwerte haben.

Hausübung

Aufgabe H1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix und $\overline{A}$ die konjugierte Matrix (welche aus A entsteht, indem man alle Einträge von A konjugiert).
Wie hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und $\overline{A}$ zusammen? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe H2 (Nullstellen von Polynomen)
Es sei $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle von $p(t)$, dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von $p(t)$.

(b) Ist der Grad von $p(t)$ ungerade, so hat $p(t)$ mindestens eine reelle Nullstelle.

(c) Ist der Grad von $p(t)$ gerade und gilt $a_0 \cdot a_N < 0$, so hat $p(t)$ mindestens zwei reelle Nullstellen.

In den Aufgabenteilen (b) und (c) dürfen Sie vorraussetzen, dass z und $\overline{z}$ für jede Nullstelle $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ die gleiche Vielfachheit besitzen.

Aufgabe H3 (Polynome)
Es seien $f(t), g(t) \in \mathbb{C}[t]$ zwei von Null verschiedene Polynome. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) f und g haben mindestens eine gemeinsame Nullstelle.

(ii) Es gibt von Null verschiedene Polynome $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathbb{C}[t]$ mit

$$\deg \widetilde{f} < \deg f,\ \deg \widetilde{g} < \deg g \quad \text{und} \quad \widetilde{g} \cdot f + \widetilde{f} \cdot g = 0\,.$$