Lineare Algebra II
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
20./21. April 2011

Minitest

Aufgabe M1 (Determinate)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ Eine Matrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle Null sind hat die Determinante Null.
- ☐ Vertauscht man bei einer Matrix zwei Zeilen, so ändert sich die Determinate nicht.
- ☐ Es sei A eine 3×3 Blockdiagonalmatrix mit zwei Blöcken. Außerdem seien die Einträge auf der Hauptdiagonalen Null. Dann ist $\det A = 0$.
- ☐ Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und B eine Basis von V. Dann ist die Determinate der Matrix $[\varphi]_B$ unabhäbgig von der Wahl der Basis B

Lösung: Die ersten beiden Aussagen sind falsch, die letzten beiden wahr.

Aufgabe M2 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ Es sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums V, der n Eigenvektoren zu n verschiedenen Eigenwerten besitzt.
  Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der die Matrix von φ eine Diagonalmatrix ist.
- ☐ Es seien v, w zwei verschiedene Eigenvektoren einer Matrix A. Dann sind v und w linear unabhängig.
- ☐ Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Nullabbildung. Dann ist φ diagonalisierbar.
- ☐ Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Koordinatenursprung um einen Winkel, der kein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Dann ist φ diagonalisierbar.
- ☐ Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel π oder 2π. Dann ist φ diagonalisierbar.

Lösung: Die erste, dritte und fünfte Aussage ist wahr. Die anderen beiden sind falsch.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenwerte und Eigenräume)

(a) Sei A eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenräume haben.

Lösung:

(a) Sei λ ein Eigenwert von A. Dann ist $\det(A - \lambda E) = 0$.
Da die Determinante invariant bzgl. Transponieren ist, gilt damit

$$\det(A - \lambda E)^T = \det(A - \lambda E) = 0\,.$$

Es ist $(A-\lambda E)^T = A^T - (\lambda E)^T = A^T - \lambda E$. Somit ist

$$\det(A^T - \lambda E) = \det(A-\lambda E)^T = 0$$

und λ ist auch Eigenwert von A^T.

Da $(A^T)^T = A$ gilt, folgt daraus, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Die Aussage lässt sich durch folgendes Gegenbeispiel wiederlegen.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$\det(A-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$$

und die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$. Zu diesen gehören die Eigenräume

$$U_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_{\lambda_2} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wegen (a) hat

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

auch die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$, aber die zugehörigen Eigenräume sind

$$U_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_{\lambda_2} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also haben A und A^T nicht die gleichen Eigenräume.

Aufgabe G2 (Eigenwerte)

Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\varphi^2 = \varphi$.

(a) Zeigen Sie, dass φ keine von 0 und 1 verschiedenen Eigenwerte haben kann.

(b) Wieviele Endomorphismen $\varphi : V \to V$ mit $\varphi^2 = \varphi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 0 haben.

(c) Wieviele Endomorphismen $\varphi : V \to V$ mit $\varphi^2 = \varphi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 1 haben.

Lösung:

(a) Für einen Eigenwert λ mit Eigenvektor $v \neq 0$ gilt wegen $\varphi^2 = \varphi$

$$\lambda v = \varphi(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda^2 v\,.$$

Es folgt $\lambda = \lambda^2$, also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

(b) Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(v)$, d.h. $w := \varphi(v)$ ist entweder gleich Null oder ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert 1. Besitzt φ also nur den Eigenwert 0, so muss $\varphi(v) = 0$ für jeden Vektor $v \in V$ gelten. Es gibt deshalb nur eine solche Abbildung, die Nullabbildung.

(c) Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\varphi(v - \varphi(v)) = 0$, d.h. $w := v - \varphi(v)$ ist entweder gleich Null oder ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert 0. Besitzt φ also nur den Eigenwert 1, so muss $v - \varphi(v) = 0$ für jeden Vektor $v \in V$ gelten. Es gibt deshalb nur eine solche Abbildung, die Identität.

Aufgabe G3 (Eigenwerte)

(a) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ den Eigenwert 1 hat. Sei $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von φ^2, der kein Eigenvektor von φ ist. Zeigen Sie, dass φ die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass -1 ein Eigenwert von $\varphi^2 + \varphi$ ist. Zeigen Sie, dass φ^3 den Eigenwert 1 hat.

Lösung:

(a) Betrachte die Vektoren $w_+ := v + \varphi(v)$ und $w_- := v - \varphi(v)$. Weil v kein Eigenvektor von φ ist, sind w_+ und w_- von Null verschieden. Weiter gilt

$$\varphi(w_+) = \varphi(v) + \varphi^2(v) = \varphi(v) + v = w_+\,, \qquad \varphi(w_-) = \varphi(v) - \varphi^2(v) = \varphi(v) - v = -w_-\,,$$

d.h. w_+ bzw. w_- sind Eigenvektoren von φ zum Eigenwert 1 bzw. -1.

(b) Sei $0 \neq v \in V$ ein Eigenvektor von $\varphi^2 + \varphi$ zum Eigenwert -1. Dann gilt $\varphi^2(v) + \varphi(v) + v = 0$ und somit

$$0 = \varphi\left(\varphi^2(v) + \varphi(v) + v\right) = \varphi^3(v) + \varphi^2(v) + \varphi(v) = \varphi^3(v) - v\,,$$

d.h. v ist ein Eigenvektor von φ^3 zum Eigenwert 1.

Hausübung

Aufgabe H1 (Inverse Matrix)
Es seien A und B jeweils $n \times n$ Matrizen. Außerdem soll $A \cdot B = E_n$ gelten.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch $B \cdot A = E_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$ ist.

Lösung:

(a) Angenommen es gilt $\det B = 0$.
Dann folgt
$$1 = \det E_n = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det A \cdot 0 = 0\,,$$
was ein Widerspruch ist. D.h. es gilt
$$\det B \neq 0\,.$$
Insbesondere existiert B^{-1}. Multipliziert man nun die gegebene Gleichung $A \cdot B = E_n$ von links mit B erhält man
$$B \cdot A \cdot B = B\,.$$
Durch Multiplikation mit B^{-1} von rechts erhält man daraus
$$B \cdot A = B \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} = E_n\,.$$
w.z.b.w.

(b) Wegen (a) gilt
$$A \cdot B = B \cdot A = E_n\,.$$
Nach Definition bedeutet dies gerade
$$A^{-1} = B \text{ und } B^{-1} = A\,.$$

Aufgabe H2 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Es gilt
$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \cdot ((-1-\lambda)(2-\lambda) + 2(2-\lambda)) + 2 \cdot (-3(2-\lambda) + 3(2-\lambda)) \\ &= -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda).\end{aligned}$$
Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen dieses Polynoms, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.
Die zu λ_i gehörenden Eigenvektoren ergeben sich als Lösung der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E)v_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.
Zu beachten ist noch, dass der Nullvektor per Definition nie ein Eigenvektor ist.

$\underline{\lambda_1 = -1:}$ In diesem Fall ist $(A+E)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also sind

$$v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

die Eigenvektoren von A zum Eigenwert -1.

$\underline{\lambda_2 = 1:}$ Hier ist $(A-E)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit sind

$$v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

die Eigenvektoren von A zum Eigenwert 1.

$\underline{\lambda_3 = 2:}$ Jetzt ist $(A-2E)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also sind

$$v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

die Eigenvektoren von A zum Eigenwert 2.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -6 & 3-\lambda & -1 \\ 6 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -6 & 3-\lambda & -4+\lambda \\ 6 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)((4-\lambda)(3-\lambda-2)) - 0 = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 \,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von B sind gerade die Nullstellen dieses Polynoms, also $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 1$.
Analog zu Aufgabenteil (a) erhält man aus

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dass

$$\mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$$

die Eigenvektoren von B zum Eigenwert 4 sind.

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass

$$\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$$

die Eigenvektoren von B zum Eigenwert 1 sind.

Aufgabe H3 (Nilpotente Matrizen)
Es sei A eine $n \times n$ Matrix und $r \in \mathbb{N}$ mit

$$A^r = 0 \text{ und } A^{r-1} \neq 0\,.$$

Dabei sei $A^0 = E_n$.

(a) Welche Eigenwerte hat A? Beweisen Sie ihre Antwort. Geben Sie dabei auch an, wie man (in Abhängigkeit von A und r) einen zugehörigen Eigenvektor bestimmen kann.

(b) Unter welchen Bedingungen ist A diagonalisierbar?

Lösung:

(a) Angenommen λ ist ein Eigenwert von A. Dann gibt es einen Vektor $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Daraus folgt

$$0 = A^r v = A^{r-1}(\lambda v) = \lambda \cdot A^{r-1} v = \ldots = \lambda^r v\,.$$

Da v nicht Null ist folgt hieraus $\lambda = 0$.
D.h. A kann nie einen von Null verschiedenen Eigenwert haben.
Da $A^{r-1} \neq 0$ gilt, gibt es einen Vektor v mit $A^{r-1}v \neq 0$ Außerdem gilt

$$A(A^{r-1}v) = A^r v = 0 = 0 \cdot v\,.$$

D.h. $A^{r-1}v$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert Null.
D.h. A hat immer genau einen Eigenwert und dieser ist Null.

(b) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von A zum Eigenwert Null gibt. Dies ist (wegen der Linearität von A) genau dann der Fall, wenn $A = 0$ gilt.