Lineare Algebra II
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
20./21. April 2011

Minitest

Aufgabe M1 (Determinate)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ Eine Matrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle Null sind hat die Determinante Null.
- ☐ Vertauscht man bei einer Matrix zwei Zeilen, so ändert sich die Determinate nicht.
- ☐ Es sei A eine 3×3 Blockdiagonalmatrix mit zwei Blöcken. Außerdem seien die Einträge auf der Hauptdiagonalen Null. Dann ist $\det A = 0$.
- ☐ Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und B eine Basis von V. Dann ist die Determinate der Matrix $[\varphi]_B$ unabhäbgig von der Wahl der Basis B

Aufgabe M2 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- ☐ Es sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums V, der n Eigenvektoren zu n verschiedenen Eigenwerten besitzt.
  Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der die Matrix von φ eine Diagonalmatrix ist.
- ☐ Es seien v, w zwei verschiedene Eigenvektoren einer Matrix A. Dann sind v und w linear unabhängig.
- ☐ Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Nullabbildung. Dann ist φ diagonalisierbar.
- ☐ Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Koordinatenursprung um einen Winkel, der kein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Dann ist φ diagonalisierbar.
- ☐ Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel π oder 2π. Dann ist φ diagonalisierbar.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenwerte und Eigenräume)

(a) Sei A eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenräume haben.

Aufgabe G2 (Eigenwerte)
Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\varphi^2 = \varphi$.

(a) Zeigen Sie, dass φ keine von 0 und 1 verschiedenen Eigenwerte haben kann.

(b) Wieviele Endomorphismen $\varphi : V \to V$ mit $\varphi^2 = \varphi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 0 haben.

(c) Wieviele Endomorphismen $\varphi : V \to V$ mit $\varphi^2 = \varphi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 1 haben.

Aufgabe G3 (Eigenwerte)

(a) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ den Eigenwert 1 hat. Sei $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von φ^2, der kein Eigenvektor von φ ist. Zeigen Sie, dass φ die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass -1 ein Eigenwert von $\varphi^2 + \varphi$ ist. Zeigen Sie, dass φ^3 den Eigenwert 1 hat.

Hausübung

Aufgabe H1 (Inverse Matrix)
Es seien A und B jeweils $n \times n$ Matrizen. Außerdem soll $A \cdot B = E_n$ gelten.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch $B \cdot A = E_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$ ist.

Aufgabe H2 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (Nilpotente Matrizen)
Es sei A eine $n \times n$ Matrix und $r \in \mathbb{N}$ mit

$$A^r = 0 \text{ und } A^{r-1} \neq 0\,.$$

Dabei sei $A^0 = E_n$.

(a) Welche Eigenwerte hat A? Beweisen Sie ihre Antwort. Geben Sie dabei auch an, wie man (in Abhängigkeit von A und r) einen zugehörigen Eigenvektor bestimmen kann.

(b) Unter welchen Bedingungen ist A diagonalisierbar?