Lineare Algebra II
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
13./14. April 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Determinante und Matrizen)
Es seien beliebige quadratische Matrizen A und B mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) A hat nur reelle Einträge und $A \cdot A = E \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (E - A)^{-1} = E + A + A^2$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

Lösung: Für diese Aufgabe werden die Eigenschaften der Determinate aus Satz 6.5.3. und Satz 6.5.4. verwendet.

(a) Diese Aussage ist richtig.
Sei $A \cdot A = E$. Es gilt $\det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$ und $\det(E) = 1$. Also folgt

$$1 = \det(E) = \det(A \cdot A) = (\det(A))^2$$

und damit

$$\det(A) = \pm 1\,.$$

(b) Diese Aussage ist richtig.
Wenn A nicht invertierbar ist, gilt $\det(A) = 0$. Also ist auch $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$ und damit AB nicht invertierbar.

(c) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $\det(A) + \det(B) = 0 + 1 = 1$ und

$$\det(A + B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 1 = \det(A) + \det(B)\,.$$

(d) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und damit auch $A^3 = 0$, aber $A \neq 0$.

(e) Diese Aussage ist richtig.
Wenn $A^3 = 0$ ist, dann gilt auch

$$\begin{aligned} (E - A)(E + A + A^2) &= E + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = E - A^3 = E - 0 = E \text{ und} \\ (E + A + A^2)(E - A) &= E + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = E - A^3 = E - 0 = E\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2\,.$$

(f) Diese Aussage ist falsch.
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$. Dann hat A nicht-reelle Einträge, aber $\det(A) = -1 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G2 (Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bei der $a_{i,j} = 1$ für $i = j+1$ oder $j = i+1$ gilt, während alle anderen Eintrage $a_{i,j}$ Null sind.

Lösung: Es gilt

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}\,.$$

Da σ eine Bijektion ist kommt in jedem der Terme $a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}$ aus jeder Spalte und jeder Zeile der Matrix A genau ein Eintrag vor. Außerdem gibt es in der letzten Zeile und der letzten Spalte jeweils nur einen Eintrag ungleich Null, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(n-1)=n\sigma(n)=n-1} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n-2),n-2}\cdot a_{n,n-1}\cdot a_{n-1,n} \\ &= \operatorname{sgn}((n-1\;\;n))\cdot a_{n,n-1}\cdot a_{n-1,n}\cdot \sum_{\sigma\in S_{n-2}} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\cdot a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n-2),n-2} \\ &= -\det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-2}\right)\,. \end{aligned}$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Formel und unter Beachtung der Tatsache, dass für $n = 1$ $\det A = \det(0) = 0$ und für $n = 2$ $\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ gilt erhält man das folgende.
Für n ungerade: $|\det A| = \det(0) = 0$ und damit auch $\det A = 0$.
Für n gerade: $\det A = (-1)^{\frac{n}{2}}$.
Insgesamt ergibt sich

$$\det A = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \equiv \pm 1 \mod 4 \\ 1 & \text{für} \quad n \equiv 0 \mod 4 \\ -1 & \text{für} \quad n \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$$

Aufgabe G3 (Vandermondesche Determinante (*))
Berechnen Sie (mit Hilfe einer Induktion nach $n \in \mathbb{N}$) die Determinante

$$V_n(x_1,\ldots,x_n) := \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei seien $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ beliebig und $n > 1$.

Lösung: Addiert man in der gegebenen Matrix zuerst das $(-x_1)$-Fache der vorletzten Spalte zur Letzten, dann das $(-x_1)$-Fache der $n-2$-ten Spalte zur $n-1$-ten usw. und im letzten Schritt das $(-x_1)$-Fache der ersten Spalte zur Zweiten, so ändert sich die Determinate der Matrix dadurch nicht, und man erhält

$$
\begin{aligned}
V_n(x_1,\dots,x_n) &= \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1x_n & \cdots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_2-x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & (x_n-x_1)x_n & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Entwickelt man diese Determinante nach der ersten Zeile und verwendet die Linearität der Determinante in jeder Zeile, dann ergibt sich

$$
\begin{aligned}
V_n(x_1,\dots,x_n) &= 1\cdot\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_2-x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_1 & (x_n-x_1)x_n & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_1)\cdot V_{n-1}(x_2,\dots,x_n).
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich die Vermutung

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

Diese Vermutung wird nun unter Verwendung der letzten Gleichung mittels Induktion bewiesen.

- Induktionsanfang: Für $n=2$ gilt

  $$V_2(x_1,x_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2-x_1 = \prod_{1\le j<i\le 2}(x_i-x_j) \quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

  D.h. die Behauptung ist für $n=2$ gezeigt.

- Induktionsvoraussetzung: Es gelte

  $$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

  für alle $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$.

- Induktionsbehauptung: Es gilt

  $$V_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) = \prod_{1\le j<i\le n+1}(x_i-x_j)$$

  für alle $x_1,\dots,x_{n+1}\in\mathbb{R}$.

- Induktionsbeweis: Aus der obigen Gleichung folgt

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}-x_1)\cdot V_n(x_2,\ldots,x_{n+1}) \\ &\overset{\text{IVor}}{=} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_{n+1}-x_1)\cdot\prod_{2\leq j<i\leq n+1}(x_i-x_j) \\ &= \prod_{1\leq j<i\leq n+1}(x_i-x_j)\,. \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Es gilt also

$$V_n(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)\quad\forall n\in\mathbb{N}, n>1, x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\,.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Wir entwickeln zuerst nach der 3-ten Zeile und dann jeweils nach der 2-ten Zeile.

$$\begin{aligned}
\det A_1 &= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 6\Big(- \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Big) \\
&\quad - \Big(- \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Big) \\
&= 6(-108 + 84 - 90) - (18 - 14) = 6(-114) - 4 \\
&= -688
\end{aligned}$$

(b) A_2^T ist von Blockgestalt, d.h. es gilt

$$\det(A_2) = \det(A_2^T) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (1-4) \cdot 3 \cdot (16-25) = 81$$

(c) Ein möglicher Umformungsschritt des Gaußalgorithmus ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Daraus ergibt sich

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \det(1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19\,.$$

Aufgabe H2

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ sie invertierbar ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \text{ (Linearität in den ersten 3 Zeilen)} \\ &= (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 \cdot (\lambda+3). \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix für alle $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{1, -3\}$ invertierbar.

Aufgabe H3

Über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ betrachten wir die Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ 4\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A_λ.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Werte von $\lambda \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, für die A_λ invertierbar ist.

Lösung:

(a) Wir entwickeln $\det A_\lambda$ zuerst nach der vierten Spalte und erhalten

$$\det A_\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ 4\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda+4 & 0 \\ 4\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Entwickeln der 3×3-Determinante nach der zweiten Zeile liefert

$$\det A_\lambda = (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda+4 & 0 \\ 4\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+4) \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 4\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

und somit

$$\det A_\lambda = (\lambda+1)(\lambda+4)(1-4\lambda^2).$$

(b) Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $\det A_\lambda \neq 0$ gilt. Wir betrachten deshalb die Gleichung

$$\det A_\lambda = (\lambda+1)(\lambda+4)(1-4\lambda^2) = (\lambda+1)(\lambda+4)(1-2\lambda)(1+2\lambda) = 0.$$

D.h. in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad \det A_\lambda = 1\cdot 4\cdot 1\cdot 1 \neq 0 \\
\lambda = 1 \quad &\Rightarrow \quad \det A_\lambda = 2\cdot 5\cdot (-1)\cdot 3 = 2\cdot 0\cdot 4\cdot 3 = 0 \\
\lambda = 2 \quad &\Rightarrow \quad \det A_\lambda = 3\cdot 6\cdot (-3)\cdot 5 = 3\cdot 1\cdot 2\cdot 0 = 0 \\
\lambda = 3 \quad &\Rightarrow \quad \det A_\lambda = 4\cdot 7\cdot (-5)\cdot 7 = 4\cdot 2\cdot 0\cdot 2 = 0 \\
\lambda = 4 \quad &\Rightarrow \quad \det A_\lambda = 5\cdot 8\cdot (-7)\cdot 9 = 0\cdot 3\cdot 3\cdot 4 = 0\,.
\end{aligned}$$

Das bedeutet $\lambda = 0$ ist der einzige Wert für den A_λ invertierbar ist.