Lineare Algebra II
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
13./14. April 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Determinante und Matrizen)
Es seien beliebige quadratische Matrizen A und B mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) A hat nur reelle Einträge und $A \cdot A = E \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (E - A)^{-1} = E + A + A^2$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

Aufgabe G2 (Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bei der $a_{i,j} = 1$ für $i = j + 1$ oder $j = i + 1$ gilt, während alle anderen Eintrage $a_{i,j}$ Null sind.

Aufgabe G3 (Vandermondesche Determinante (*))
Berechnen Sie (mit Hilfe einer Induktion nach $n \in \mathbb{N}$) die Determinante

$$V_n(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebig und $n > 1$.

Hausübung

Aufgabe H1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H2

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ sie invertierbar ist.

Aufgabe H3

Über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ betrachten wir die Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ 4\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A_λ.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Werte von $\lambda \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, für die A_λ invertierbar ist.