Lineare Algebra II
13. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
12. Juli 2011

Aufgabe T1 (Jordansche Normalform)
Die Matrix A besitze nur die Eigenwerte 1 und -1. Geben Sie eine Jordansche Normalform von A an für den Fall, dass

(a) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist.

(b) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische zwei ist.

(c) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische eins ist.

Lösung: Aus den Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich die folgenden Informationen über die Jordanblöcke ablesen:

- Die Summe der algebraischen Vielfachheiten ist gleich der Raumdimension.
- Die algebraische Vielfachheit ist die Summe der Größen der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.
- Die geometrische Vielfachheit ist die Anzahl der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.

Damit folgt:

(a) Eine Jordannormalform J von A besitzt zu jedem Eigenwert zwei Jordanblöcke der Größe eins, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und zwei Jordanblöcke zum Eigenwert -1 der Größe eins bzw. zwei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und einen Jordanblock zum Eigenwert -1 der Größe drei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T2 (Jordansche Normalform)
Bestimmen Sie je eine Jordansche Normalform der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Berechnen Sie zur Bestimmung der Jordanschen Normalform von B zunächst die Matrix B^3.

Lösung: Zuerst sind die Eigenwerte von A zu bestimmen. Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$
\begin{aligned}
P_A(t) &= \det(A-tE) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\\text{nach der}\\\text{4. Zeile}}}{=} (2-t)\det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-t & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} - \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-t & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\\text{nach der}\\\text{1. Zeile}}}{=} (2-t)\left[(1-t)(3-t)((1-t)(3-t)+1)+((1-t)(3-t)+1)\right] \\
&= (2-t)((1-t)(3-t)+1)^2 = (2-t)(t^2-4t+4)^2 = (2-t)(t-2)^4 \\
&= (2-t)^5
\end{aligned}
$$

Folglich besitzt A nur einen Eigenwert und zwar $\lambda = 2$ (mit der algebraischen Vielfachheit fünf).
Die Matrix

$$
A-2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

hat offensichtlich Rang drei, d.h. die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ ist zwei. Die Jordansche Normalform besteht also aus zwei Jordanblöcken. D.h. es gibt (bis auf Vertauschen der Jordanblöcke) die zwei Möglichkeiten

$$
J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Offensichtlich ist $(J_1-2E)^3 = 0$ und $(J_2-2E)^3 \neq 0$. Dasselbe gilt dann auch für alle ähnliche Matrizen $(B-2E)$.
Wegen

$$
(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A-2E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

kann A nicht ähnlich zu J_2 sein. D.h. eine Jordansche Normalform von A ist

$$
J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Zur Bestimmung der Jordanschen Normalform von B berechnet man zunächst

$$
B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

D.h. die Matrix B ist nilpotent, hat also nur den Eigenwert $\lambda = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 5).
Außerdem schließt man aus $B^3 = 0$ und $B^2 \neq 0$, dass der größte Jordanblock in der Jordannormalform von B die Größe drei hat.
Des Weiteren berechnet man den Rang von B, dieser ist drei. Also ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts Null gleich zwei und es gibt zwei Blöcke in der zugehörigen Jordanschen Normalform.
Zusammen heißt das

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordansche Normalform der Matrix B.

Aufgabe T3 (Jordansche Normalform und Potenzen von Matrizen)

(a) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform und eine Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Eine Jordanbasis ist hier eine Basis des $\mathbb{R}^2$, bzgl. der die Matrix in Jordannormalform vorliegt.

(b) Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Das zur Matrix A gehörige charakteristische Polynom ist

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} -4-t & 4 \\ -9 & 8-t \end{pmatrix} = (-4-t)(8-t) + 9 \cdot 4 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 .$$

D.h. der einzige Eigenwert von A ist $\lambda = 2$.
Offensichtlich ist der Rang von

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

gleich Eins, also ist die geometrische Vielfachheit von λ gleich Eins. D.h. die Jordansche Normalform von A ist

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert zwei ist offensichtlich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist der erste Vektor der Jordanbasis. Der zweite Vektor v_2 dieser Basis muss die Gleichung $Av_2 = 2v_2 + v_1$ erfüllen. Dies gilt genau dann, wenn

$$(A-2E)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt. Dies ist offensichtlich für

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.
D.h. die gesuchte Jordanbasis ist

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Aus Aufgabenteil (a) folgt, dass für die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$S^{-1}AS = J\,.$$

Man errechnet leicht, dass

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt.
Damit ergibt sich

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJ^nS^{-1}\,.$$

Z.B. mit Hilfe einer einfachen Induktion erhält man

$$J^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A^n &= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2-3n & 2+2n \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2-6n & 4n \\ -9n & 2+6n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe T4 (Jordansche Normalform)
Es seien $A_1,\ A_2,\ldots,A_8 \in M_5(\mathbb{C})$ komplexe 5×5-Matrizen, die alle den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ haben und keinen weiteren. Zeigen Sie, dass mindestens zwei der Matrizen $A_1,\ A_2,\ldots,A_8$ zueinander ähnlich sind.

Lösung: Bekannt ist, dass zwei Matrizen mit der gleichen Jordanschen Normalform (bis auf Permutation der Jordanblöcke) ähnlich sind.
Mit den gegebenen Bedingungen gibt es bis auf eine Permutation der Jordanblöcke nur die folgenden Möglichkeiten für die Jordansche Normalform:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dies sind nur sieben Möglichkeiten, d.h. mindestens zwei der gegebenen acht Matrizen haben (bis auf Permutation der Jordanblöcke) dieselbe Jordansche Normalform und sind somit ähnlich zueinander.