Lineare Algebra II
12. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
05. Juli 2011

Aufgabe T1 (Hauptachsentransformation)
Gegeben sei die quadratische Hyperfläche

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1 \right\}.$$

(a) Wie sieht die zugehörige quadratische Form Q aus?

(b) Führen Sie für Q eine Hauptachsentransformation durch.

(c) Was sind die Hauptachsen der quadratischen Hyperfläche und von welchem Typ ist sie?

(d) Skizzieren Sie die quadratische Hyperfläche.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie die transformierte Hyperfläche aussieht.

Lösung:

(a) Die quadratische Form Q hat die Gestalt

$$Q(x) = 7x_1^2 + 24x_1x_2 = x^T \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} x \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Die zu Q gehörige symmetrische Bilinearform hat also die Strukturmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardeinheitsbasis).

(b) Für die Hauptachsentransformation bestimmt man zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Es gilt

$$P_A(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 7-t & 12 \\ 12 & -t \end{pmatrix} = (7-t)(-t) - 12^2 = t^2 - 7t - 144 .$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 16$ und $\lambda_2 = -9$. Als zugehörigen Eigenvektoren berechnet man

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Diese beiden Vektoren haben die Norm 5, d.h.

$$B = \left(\frac{1}{5} v_1, \frac{1}{5} v_2 \right)$$

ist eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Die Matrix der obigen Bilinearform hat dann bzgl. der Basis B die Gestalt

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} .$$

D.h. bzgl. der Basis B hat Q die Gestalt

$$Q(x) = 16x_1^2 - 9x_2^2 \quad \forall x = \frac{1}{5} x_1 v_1 + \frac{1}{5} x_2 v_2 \in \mathbb{R}^2 .$$

(c) Aus Aufgabenteil (b) liest man ab, dass die Hauptachsen die Geraden in Richtung

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sind. Da ein Eigenwert von A positiv und einer negativ ist, handelt es sich bei dieser quadratischen Hyperfläche um eine Hyperbel. Die transformierte Hyperfläche hat die asymptotischen Geraden $x_2 = \pm\frac{4}{3}x_1$.

(d) Man zeichnet zunächst die Transformierte Hyperbel (wie in der Vorlesung) mit den in Aufgabenteil (c) angegebenen Asymptoten. Die Schnittpunkte dieser Hyperbel mit der x_1-Achse liegen bei $(\frac{1}{4}, 0)$ und $(-\frac{1}{4}, 0)$.

Um die originale quadratische Hyperfläche zu zeichnen muss man die transformierte Hyperfläche so drehen, dass das Bild der Koordinatenachsen mit den Hauptachsen zusammenfällt.

Aufgabe T2 (Jordansche Normalform)

Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und J ihre Jordansche Normalform. Außerdem sei λ ein Eigenwert von A.

(a) Zeigen Sie: Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von A ist gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von J, die gleich λ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ gleich $n - \operatorname{rank}(A - \lambda E)$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Da J die Jordansche Normalform von A ist, sind die beiden Matrizen ähnlich und J hat obere Dreiecksgestalt. Da das charakteristische Polynom ähnlicher Matrizen gleich ist, gilt das also auch für die algebraische Vielfachheit von λ. Da J eine obere Dreiecksmatrix ist, ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von J gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von J, die gleich λ sind. Zusammen folgt die Aussage, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von A gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von J, die gleich λ sind, ist.

(b) O.B.d.A. habe J die Blockgestalt

$$J = \begin{pmatrix} J_\lambda & 0 \\ 0 & \widetilde{J} \end{pmatrix},$$

wobei die Diagonaleinträge von J_λ alle gleich λ und die von $\widetilde{J}$ alle ungleich λ sind.

Da J und A ähnlich sind, gilt das auch für $J - \lambda E$ und $A - \lambda E$. Da der Rang ähnlicher Matrizen gleich ist, folgt daraus

$$\operatorname{rank}(A - \lambda E) = \operatorname{rank}(J - \lambda E).$$

Die Matrix $J - \lambda E$ besteht aus zwei Blöcken. Der zweite Block $\widetilde{J} - \lambda E$ ist eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge alle ungleich Null sind. Sie hat also vollen Rang. Der erste Block $J_\lambda - \lambda E$ ist eine obere Dreiecksmatrix, die nur in der Nebendiagonalen einige Einträge hat. Ihr Rang ist also der volle Rang Minus die Anzahl der Nullspalten in $J_\lambda - \lambda E$. Jeder Jordanblock zum Eigenwert λ erzeugt in $J_\lambda - \lambda E$ genau eine Nullzeile. D.h. es gilt

$$\operatorname{rank}(A - \lambda E) = \operatorname{rank}(J - \lambda E) = n - \text{ Anzahl der Jordanblöcke in } J \text{ zum Eigenwert } \lambda.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(c) Die Matrix B hat Blockdiagonalgestalt, wobei der erste Block $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ bereits Diagonalgestalt hat. D.h. man muss nur noch die Jordansche Normalform des zweiten Blocks berechnen. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 1 = t^2 - 2t = t(t-2).$$

D.h. die Eigenwerte sind 1 und 2. Wegen Aufgabenteil (a) besteht die Jordansche Normalform dieses Blockes also aus zwei Jordanblöcken der größe Eins zu den Eigenwerten Null bzw. Zwei.

Die Jordansche Normalform von B ist also
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alternativ kann man auch direkt die Eigenwerte von B mit ihren algebraischen Vielfachheiten und den Rang von $B-2E$ ausrechnen und erhält mit Hilfe der Aufgabenteile (a) und (b) dieselbe Gestalt für die Jordansche Normalform von B.

Der Rang von C ist offensichtlich Eins, d.h. C hat einen zweidimensionalen Kern, welcher der Eigenraum zum Eigenwert Null ist. Außerdem ist offensichtlich
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ein Eigenvektor von C zum Eigenwert Drei. D.h. es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von C. C ist also diagonalisierbar und die zugehörige Diagonalmatrix
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist die Jordansche Normalform von C.

Aufgabe T3 (quadratische Form)

(a) Betrachten Sie die quadratischen Formen Q_i mit
$$Q_i(x) = x^T A_i x$$
für die Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$
Welche dieser quadratischen Formen sind positiv definit? Welche sind negativ definit? Zeigen Sie jeweils ihre Aussagen.

(b) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matrizen? Zeigen Sie Ihre Aussage.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Kriterium über Minoren aus der Vorlesung.
Für A_1 gilt
$$\det((A_1)_1) = \det(3) = 3 > 0 \text{ und } \det((A_1)_2) = \det A_1 = 12 - 9 = 3 > 0\,.$$
D.h. A_1 ist positiv definit.
Für A_2 gilt
$$\det((A_2)_1) = \det(-1) = -1 < 0 \text{ und } \det((A_2)_2) = \det A_2 = 10 - 9 = 1 > 0\,.$$
D.h. A_2 ist negativ definit.
Die zweite Spalte von A_3 ist das doppelte der ersten Spalte, d.h. es gilt
$$\det((A_3)_3) = \det A_3 = 0\,.$$
Also ist A_3 weder positiv noch negativ definit.
Für A_4 gilt
$$\det((A_4)_1) = \det(1) = 1 > 0, \qquad \det((A_4)_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0 \text{ und } \det((A_4)_3) = \det A_4 = 1\,.$$
D.h. A_4 ist positiv definit.

(b) Eine nicht invertierbare Matrix hat Determinante Null und damit einen Eigenwert Null. Es sind also nicht alle Eigenwerte größer als Null. D.h. eine solche Matrix kann nicht positiv definit sein.

Aufgabe T4 (Jordansche Normalform)
Es sei A eine 3×3-Matrix, die nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzt.
Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen an, die zu A gehören könnten. Dabei sieht man Normalformen, die nur durch ein Vertauschen der Vektoren in der zugehörigen Jordanbasis auseinander hervorgehen als gleich an.

Lösung: Die möglichen Jordanschen Normalformen sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$