Lineare Algebra II
12. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
05. Juli 2011

Aufgabe T1 (Hauptachsentransformation)
Gegeben sei die quadratische Hyperfläche

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1 \right\}.$$

(a) Wie sieht die zugehörige quadratische Form Q aus?

(b) Führen Sie für Q eine Hauptachsentransformation durch.

(c) Was sind die Hauptachsen der quadratischen Hyperfläche und von welchem Typ ist sie?

(d) Skizzieren Sie die quadratische Hyperfläche.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie die transformierte Hyperfläche aussieht.

Aufgabe T2 (Jordansche Normalform)
Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und J ihre Jordansche Normalform. Außerdem sei λ ein Eigenwert von A.

(a) Zeigen Sie: Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von A ist gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von J, die gleich λ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ gleich $n - \operatorname{rank}(A - \lambda E)$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T3 (quadratische Form)

(a) Betrachten Sie die quadratischen Formen Q_i mit

$$Q_i(x) = x^T A_i x$$

für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser quadratischen Formen sind positiv definit? Welche sind negativ definit? Zeigen Sie jeweils ihre Aussagen.

(b) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matrizen? Zeigen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe T4 (Jordansche Normalform)
Es sei A eine 3×3-Matrix, die nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzt.
Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen an, die zu A gehören könnten. Dabei sieht man Normalformen, die nur durch ein Vertauschen der Vektoren in der zugehörigen Jordanbasis auseinander hervorgehen als gleich an.