Lineare Algebra II
11. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
28. Juni 2011

Aufgabe T1 (Bilinearformen)
Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.
Wir betrachten die beiden Bilinearformen

$$\begin{aligned} F_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad & (x, y) \mapsto x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 \text{ und} \\ F_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad & (x, y) \mapsto x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 \,. \end{aligned}$$

(a) Geben sie die Matrizen der Bilinearformen F_1 und F_2 bezüglich der Standardeinheitsbasis des $\mathbb{R}^2$ an.

(b) Geben sie die Matrizen der Bilinearformen F_1 und F_2 bezüglich der Basis $B = (v_1, v_2)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an. Führen Sie dazu einen Basiswechsel aus. Wie könnte man diese Matrizen alternativ bestimmen?

(c) Für welche $i \in \{1, 2\}$ ist Q_i mit $Q_i(x) := F_i(x, x)$ eine quadratische Form. Zeigen Sie ihre Aussagen.

Lösung:

(a) Die Standardeinheitsvektoren seien wie gewöhnlich mit e_1 und e_2 bezeichnet. Dann ist die gesuchte Matrix der Bilinearform F_1 gleich

$$\begin{pmatrix} F_1(e_1, e_1) & F_1(e_1, e_2) \\ F_1(e_2, e_1) & F_1(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und die von F_2 gleich

$$\begin{pmatrix} F_2(e_1, e_1) & F_2(e_1, e_2) \\ F_2(e_2, e_1) & F_2(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Transformationsmatrix S ist gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. die Matrix von F_1 bzgl. der Basis B ist gleich

$$S^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

und die Matrix von F_2 bzgl. der Basis B ist gleich

$$S^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man die Matrizen bestimmen, indem man wie im Aufgabenteil (a) die Basisvektoren v_1 und v_2 in die Bilinearformen einsetzt.

(c) F_2 ist eine symmetrische Bilinearform. Für solche ist aus der Vorlesung bereits bekannt, dass

$$Q_2(x) = F_2(x,x) = x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + 2x_2x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 .$$

eine quadratische Form ist. Diese heißt zu F_2 assoziierte quadratische Form.
Außerdem gilt

$$Q_1(x) = F_1(x,x) = x_1x_1 + 2x_1x_2 + x_2x_1 + 2x_2x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_1 + 2x_2^2 .$$

Daraus folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda x) &= \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda x_1 \lambda x_2 + \lambda x_2 \lambda x_1 + 2\lambda^2 x_2^2 = \lambda^2 Q(x) \text{ und} \\ \frac{1}{2}(Q_1(x+y) - Q_1(x) - Q_1(y)) &= (x_1+y_1)^2 + 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_2+y_2)(x_1+y_1) + 2(x_2+y_2)^2 \\ &\quad - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2x_1 - 2x_2^2 - y_1^2 - 2y_1y_2 - y_2y_1 - 2y_2^2 \\ &= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + x_2y_1 + y_2x_1 + 4x_2y_2 . \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist offensichtlich bilinear. Also ist auch Q_1 eine quadratische Form.
Alternativ kann man zeigen, dass $Q(x) = F(x,x)$ für jede Bilinearform F eine quadratische Form ist. Dazu muss man die beiden obigen Eigenschaften einer quadratischen Form im Allgemeinen nachrechnen.

Aufgabe T2 (Quadratische Form)
Gegeben sei die quadratische Form $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 .$$

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, so dass

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S derart, dass

$$S^\top A S =: D$$

Diagonalgestalt hat. Geben Sie außerdem die Matrix D an.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) .$$

D.h. die gesuchte Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es für symmetrische Matrizen eine solche orthogonale Matrix S gibt. Die Spalten dieser Matrix bestehen aus einem Orthonormalsystem von Eigenvektoren.
Daher berechnen wir zunächst die Eigenwerte von A und bestimmen ein zugehöriges orthonormiertes Eigenvektorsystem.
Es gilt

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -2 & 0 \\ -2 & 2-t & -2 \\ 0 & -2 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(2-t)(3-t) - 4(1-t) - 4(3-t) = -t^3 + 6t^2 - 3t - 10 \\ &= (2-t)(5-t)(-1-t), \end{aligned}$$

somit sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ und $\lambda_3 = -1$ die Eigenwerte von A.
Wir bestimmen den Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit Länge 1, d.h. $\|v_1\| = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Normiere u_1 auf die Länge 1:

$$\|u_1\| = \sqrt{4+1+4} = 3 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend berechnen wir normierte Eigenvektoren v_2 und v_3 zu den Eigenwerten λ_2 bzw. λ_3 und erhalten

$$v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D.h man kann für D und S die Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Für diese gilt $S^\top AS = S^{-1}AS = SAS = D$.

Aufgabe T3 (Quadratische Formen)
Wir betrachten in dieser Aufgabe die Abbildungen

$$\begin{aligned} Q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1x_2 - x_2x_3 \text{ und} \\ Q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3\,. \end{aligned}$$

(a) Sind Q_1 bzw. Q_2 quadratische Formen? Zeigen Sie Ihre Aussagen.

(b) Eine quadratische Form $Q : V \to \mathbb{K}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt positiv definit, wenn für alle $x \in V - \{0\}$

$$Q(x) > 0$$

gilt.
Sind Q_1 bzw. Q_2 positiv definit? Zeigen Sie Ihre Behauptungen.

Lösung:

(a) Man betrachtet die Abbildungen

$$\begin{aligned} F_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad & (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} y \text{ und} \\ F_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad & (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} y\,. \end{aligned}$$

F_1 und F_2 sind offensichtlich symmetrische Bilinearformen. Außerdem gilt für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} F_1(x,x) &= x^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x = x_1x_2 - x_2x_3 = Q_1(x) \text{ und} \\ F_2(x,x) &= x^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} x = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 = Q_2(x)\,. \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede Abbildung $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto F(x,x)$ mit einer symmetrischen Bilinearform F eine quadratische Form ist.

Daraus folgt, dass Q_1 und Q_2 quadratische Formen sind.

Alternativ kann man auch die definierenden Eigenschaften einer quadratischen Form zeigen.

(b) Es gilt

$$Q_1\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-1)\cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2 < 0\,.$$

D.h. Q_1 ist nicht positiv definit. Außerdem gilt für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

D.h. Q_2 ist positiv definit.

Aufgabe T4 (Quadratische Form)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Q : V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Form. Zeigen Sie, dass dann für alle $x, y \in V$

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x) + Q(y))$$

gilt.

Lösung: Es seien $x, y \in V$ beliebig.
Wegen der Definition einer quadratischen Form ist die Abbildung F mit

$$F(x,y) := \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$$

eine Bilinearform. Außerdem ist

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\,.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} 0 &= F(x,y)-F(x,y)=F(x,y)+F(x,-y)=\frac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right)+\frac{1}{2}\left(Q(x-y)-Q(x)-Q(-y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)+Q(x-y)-Q(x)-(-1)^2Q(y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q(x+y)+Q(x-y)-2\cdot Q(x)-2\cdot Q(y)\right)\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung

$$Q(x+y)+Q(x-y)=2(Q(x)+Q(y))\,.$$