Lineare Algebra II
11. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
28. Juni 2011

Aufgabe T1 (Bilinearformen)
Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.
Wir betrachten die beiden Bilinearformen

$$\begin{aligned} F_1 &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, && (x,y) \mapsto x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \text{ und} \\ F_2 &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, && (x,y) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2\,. \end{aligned}$$

(a) Geben sie die Matrizen der Bilinearformen F_1 und F_2 bezüglich der Standardeinheitsbasis des $\mathbb{R}^2$ an.

(b) Geben sie die Matrizen der Bilinearformen F_1 und F_2 bezüglich der Basis $B = (v_1, v_2)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an. Führen Sie dazu einen Basiswechsel aus. Wie könnte man diese Matrizen alternativ bestimmen?

(c) Für welche $i \in \{1,2\}$ ist Q_i mit $Q_i(x) := F_i(x,x)$ eine quadratische Form. Zeigen Sie ihre Aussagen.

Aufgabe T2 (Quadratische Form)
Gegeben sei die quadratische Form $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3\,.$$

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, so dass

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S derart, dass

$$S^\top A S =: D$$

Diagonalgestalt hat. Geben Sie außerdem die Matrix D an.

Aufgabe T3 (Quadratische Formen)
Wir betrachten in dieser Aufgabe die Abbildungen

$$\begin{aligned} Q_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, && \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1x_2 - x_2x_3 \text{ und} \\ Q_2 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, && \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3\,. \end{aligned}$$

(a) Sind Q_1 bzw. Q_2 quadratische Formen? Zeigen Sie Ihre Aussagen.

(b) Eine quadratische Form $Q : V \to \mathbb{K}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt positiv definit, wenn für alle $x \in V - \{0\}$

$$Q(x) > 0$$

gilt.

Sind Q_1 bzw. Q_2 positiv definit? Zeigen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe T4 (Quadratische Form)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Q : V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Form. Zeigen Sie, dass dann für alle $x, y \in V$

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x) + Q(y))$$

gilt.