Lineare Algebra II
10. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
21. Juni 2011

Aufgabe T1 (Drehungen und Spiegelungen)
Geben Sie die Matrix der folgenden Abbildungen bezüglich der Standardeinheitsbasis an.

(a) Eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um $\frac{\pi}{3}$ um den Koordinatenursprung.

(b) Eine Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an einer Geraden durch den Koordinatenursprung, welche mit der x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{6}$ einschließt.

(c) Eine Abbildung vom $\mathbb{R}^4$ in den $\mathbb{R}^4$, welche in der Ebene E die von den Vektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird, einer Drehung um $\frac{\pi}{3}$ um den Koordinatenursprung entspricht und die alle Elemente aus $E^\perp$ auf sich abbildet.

Lösung:

(a) Durch eine solche Drehung wird der Einheitsvektor $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den um $\frac{\pi}{3}$ gedrehten Vektor

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

abgebildet.

Der Einheitsvektor $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird auf den um $\frac{\pi}{3}$ gedrehten Vektor

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

abgebildet.
D.h. die gesuchte Matrix ist gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Die Spiegelung sei mit f bezeichnet.
Ich bestimme zunächst eine Matrix von f bezüglich einer Basis $B = (b_1, b_2)$, bei welcher b_1 in Richtung der Spiegelgeraden verläuft und b_2 senkrecht auf dieser Geraden liegt.
Solche Vektoren sind zum Beispiel

$$b_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Da f die Spiegelung an der gegebenen Geraden ist, gilt

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$S := [\mathrm{id}]_E^B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

offensichtlich eine orthogonale Matrix, d.h. die gesuchte Matrix ist

$$\begin{aligned} [f]_E^E &= [\mathrm{id}]_E^B\,[f]_B^B\,[\mathrm{id}]_B^E = S\,[f]_B^B\,S^{-1} = S\,[f]_B^B\,S^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch geometrisch die Bilder der Standardeinheitsvektoren berechnen.

(c) Die Spiegelung sei mit g bezeichnet.
Zunächst stellt man fest, dass eine Drehung in einer Ebene im $\mathbb{R}^4$ bzgl. einer beliebigen Orthonormalbasis dieselbe Matrix hat, wie eine Drehung um denselben Winkel im $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Standardeinheitsbasis, denn man kann die beiden Ebenen (inklusive ihrer Basis) isometrisch miteinander identifizieren.
D.h. bzgl. jeder Orthonormalbasis $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, bei der die Vektoren v_1 und v_2 die Ebene E aufspannen, hat g die Matrix

$$[g]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um mögliche Basisvektoren v_1 und v_2 zu bestimmen wendet man das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren b_1 und b_2 an. Dabei ergibt sich

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= b_2 - \langle b_2 v_1 \rangle\, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die restlichen Basisvektoren kann man

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wählen, denn diese bilden zusammen mit den Vektoren v_1 und v_2 offensichtlich eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.
D.h.

$$S := [\mathrm{id}]_E^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix, also ergibt sich die gesuchte Matrix durch

$$
\begin{aligned}
[g]_E^E &= [\mathrm{id}]_E^B\,[g]_B^B\,[\mathrm{id}]_B^E = S\,[g]_B^B\,S^{-1} = S\,[g]_B^B\,S^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1-\sqrt{3}}{4} & -\frac{1-\sqrt{3}}{4} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe T2 (Eigenwerte)

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die (eventuell komplexen) Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die (eventuell komplexen) Eigenwerte der Matrix einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Koordinatenursprung um einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$P_A(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} a-t & -b \\ b & a-t \end{pmatrix} = (a-t)^2 + b^2 = t^2 - 2at + a^2 + b^2\,.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind offensichtlich

$$\lambda_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)} = a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm ib\,.$$

D.h. die Eigenwerte von A sind

$$a + ib \text{ und } a - ib\,.$$

(b) Analog zum Vorgehen in Aufgabe G1 (a) bestimmt man die Matrix der Drehung bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Diese ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Aus Aufgabenteil (a) folgt dann, dass die gesuchten Eigenwerte gleich

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \text{ und } \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}$$

sind.

Aufgabe T3 (Diagonalisieren)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix P an, für die P^TAP eine Diagonalmatrix ist und berechnen Sie P^TAP.

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)\,.$$

Also sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte von A.
Als zugehörige Eigenvektoren ergeben sich z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalisiert man diese Vektoren, so hat man die Spalten von einer möglichen orthogonalen Matrix P gefunden. Mit dieser Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T4 (Diagonalisierbarkeit)
Warum gibt es eine unitäre Matrix Q, so dass für

$$A := \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

die Matrix $A' = Q^{-1} A\, Q$ eine Diagonalmatrix ist?

Lösung: A ist normal, denn es gilt

$$AA^* = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i & 1 \\ i & -i & i \\ 1 & -i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ i & 3 & i \\ 1 & -i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -i & 1 \\ i & -i & i \\ 1 & -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix} = A^* A\,.$$

Aus dem Hauptsatz über normale Matrizen folgt dann die unitäre Diagonalisierbarkeit.